Maths pour l'Info 1

– L1 –

2013-2014

TD n° 2: mots et langages

► Exercice 1 ◄ Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ et le mot $u = aacb$. Quels sont les préfixes de u ? quels sont ses suffixes ? ses facteurs ?

► Exercice 2 ◄ Soit $L = \{ab, ba\}$. Parmi les mots suivants, lesquels sont dans L^* : *abba*, *ababa*, *aabb*, *ababab*, ε, *baab*, *bbaabb* ?

► Exercice 3 ◄ Soit $E = \{baa, ba, bba\}$ et $F = \{b, ab\}$, calculez $E \cdot F$ et $F \cdot E$.

► Exercice 4 ◄ On définit sur $\{a, b\}^*$ la relation R par

$$u \mathrel{\mathrm{R}} v \Leftrightarrow |u|_a < |v|_a \text{ ou } (|u|_a = |v|_a \text{ et } |u|_b \leq |v|_b)$$

R est-elle une relation d'ordre ?

► Exercice 5 ◄ Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des langages ne contenant que des palindromes sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$. Est-ce que les langages suivants sont dans $\mathcal{P}$?

- $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_4 = \{c a^n b a^n c \mid n \in \mathbb{N}\}$

Est ce que $\mathcal{P}$ est stable pour l'union, l'intersection, la concaténation et le passage au carré $(L \cdot L)$?

► Exercice 6 ◄ Sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ quels sont les mots plus petits que *bac* pour l'ordre militaire (d'abord la taille puis dictionnaire)? Combien y a-t-il de mots plus petits que *bac* pour l'ordre lexicographique?

► Exercice 7 ◄ On travaille sur l'alphabet $A = \{a, b\}$. Soit $L = (\{a\}^* \cdot \{b\})^*$. Montrez que L est exactement l'ensemble des mots qui ne se terminent pas par un a.

► Exercice 8 ◄ Est-ce que la relation "est préfixe de" définie sur les mots de A^* est une relation d'ordre ?

► Exercice 9 ◄ Soit $E = \mathcal{P} \backslash \{\emptyset\}$ l'ensemble des langages non vides. On définit l'application f de E dans A^* qui à un ensemble de mots X associe son plus petit mot pour l'ordre militaire :

$$f(X) = \min_{\text{mil}} X.$$

Est-ce que f est injective ? surjective ?

► Exercice 10 ◄ Soit u un mot sur l'alphabet A, un bord de u est un mot, différent de u lui-même, qui est à la fois préfixe et suffixe de u. Quels sont tous les bords de $u_1 = aabaaba$ et de $u_2 = baabaabab$? Montrer que la relation "est un bord de" est transitive.

► Exercice 11 ◄ Soit X un langage. On note $\mathrm{Pref}(X)$ l'ensemble de tous les préfixes des mots de X. On dit qu'un langage X est préfixiel si $X = \mathrm{Pref}(X)$.

Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, le langage $E = \{\varepsilon, 0, 01, 1, 011, 010, 01110, 01111\}$ est-il prefixiel? Le langage $F = \{0^n 1^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ est-il prefixiel ? $F = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il prefixiel ?

Montrer que pour tout langage X, $\mathrm{Pref}(X) = \mathrm{Pref}(\mathrm{Pref}(X))$.

► Exercice 12 ◄ Un mot sur un alphabet A est dit mot de Lyndon s'il est plus petit pour l'ordre lexicographique que tous ses suffixes propres (différents de lui-même et du mot vide). Parmi les mots suivants, sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$, lesquels sont des mots de Lyndon : *aabac*, *bac*, *aacaab*, *bcc*?

Le théorème de Lyndon, que nous admettons, dit que tout mot s'écrit d'une unique façon comme concaténation décroissante de mots de Lyndon : pour tout mot $u \in A^*$, il existe $l_1, l_2, \cdots, l_n$ n mots de Lyndon tels que $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$ et

$$u = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n$$

Décomposez $u = abaababaaababaaab$ et $v = caabcaabbaccab$ selon le théorème de lyndon.

Pour toute décomposition d'un mot u de la forme $u = vw$, on dit que le mot $u' = wv$ est une rotation de u. Montrer que la relation "est une rotation de " est une relation d'équivalence. A quelle condition une classe d'équivalence contient un mot de Lyndon?

► Exercice 13 ◄ Soient a et b deux lettres de A et $w \in A^*$. Montrer que $aw = wb$ si et seulement si $a = b$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $w = a^p$.