

# Maths pour l'Info 1

– L1 –  
2013-2014

---

TD n° 5: notation  $\mathcal{O}$

---

► **Exercice 1** ◀ Donnez une approximation la plus précise et la plus simplifiée possible des fonctions suivantes, sous la forme  $\Theta(f_n)$  quand c'est possible ou  $\mathcal{O}(f_n)$  sinon.

- (a)  $\frac{3^n(1+\cos(\frac{\pi n}{2}))+n^3}{2}$   
(b)  $10^8 n^4 + n^n + 10^{-8} 4^n$   
(c)  $\frac{27n^2+6n^3 \ln n+8 \ln^4 n+e^{\sqrt{\ln n}}}{\pi\sqrt{n}}$

► **Exercice 2** ◀ Montrer que  $\ln n! = \Theta(n \ln n)$ .

► **Exercice 3** ◀ Soit  $\alpha \geq 1$  un entier et  $A_\alpha(n) = \sum_{i=1}^n i^\alpha$ . Que vaut  $A_1(n)$ ? Montrer que  $A_\alpha(n) \in \Theta(n^{\alpha+1})$ .

► **Exercice 4** ◀ Pour chaque couple de suite  $f_n, g_n$  précisez si  $f_n \in \mathcal{O}(g_n)$ ,  $f_n \in \Omega(g_n)$  ou  $f_n \in \Theta(g_n)$ .

- |    |  |                      |
|----|--|----------------------|
| a) | $f_n = n^{10}$                         | $g_n = 2^{n/2}$      |
| b) | $f_n = n^{3/2}$                        | $g_n = n \ln^2(n)$   |
| c) | $f_n = \ln(n^3)$                       | $g_n = \ln(n)$       |
| d) | $f_n = \ln(3^n)$                       | $g_n = \ln(2^n)$     |
| e) | $f_n = 2^n$                            | $g_n = 2^{n/2}$      |
| f) | $f_n = n^2$                            | $g_n = (n/2)^2$      |
| g) | $f_n = (2 + \cos(\frac{\pi n}{2}))n^2$ | $g_n = 6n^2 + \ln n$ |

► **Exercice 5** ◀ Soit  $X$  un ensemble de suites, on définit  $e^X$  par

$$e^X = \{(e^{u_n})_{n \in \mathbb{N}} \mid u_n \in X\}.$$

A-t-on  $e^{\mathcal{O}(n)} \subset \mathcal{O}(e^n)$  ?

► **Exercice 6** ◀ On reprend l'exercice 3, afin d'obtenir une estimation plus précise. Montrer, avec la méthode d'approximation par intégrales, que pour tout entier  $k \geq 1$  on a :

$$A_k(n) = \sum_{i=1}^n i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \mathcal{O}(n^k).$$

► **Exercice 7** ◀ Montrer que

$$S_n = \sum_{i=1}^n i \ln(i) = \frac{1}{2} n^2 \ln n + \mathcal{O}(n^2).$$