Mathématiques pour l'Informatique 3

– L2 –
11 avril 2013

Examen

Durée : **1h30**. Documents et calculatrices interdits. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

▶ **Exercice 1** ◀ Soit A un alphabet. Pour tous mots u et v de A^*, on rappelle que u est un facteur de v quand il existe deux mots s et t de A^* tels que $v = sut$. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur A^* par $u \,\mathcal{R}\, v$ si et seulement si u est un facteur de v.

(a) Est-ce que $aab \,\mathcal{R}\, baaba$? $ba \,\mathcal{R}\, ab$? $\varepsilon \,\mathcal{R}\, bbac$? $bbac \,\mathcal{R}\, \varepsilon$? $aaa \,\mathcal{R}\, bababab$?

(b) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(c) Est-ce que c'est un ordre total ?

(d) Montrez que si u est strictement plus petit que v pour cet ordre, alors $|u| < |v|$. En déduire que l'ordre est bien fondé.

(e) On considère le même ordre, mais on restreint l'ensemble de définition à $E = \{\varepsilon, ab, ba, bab, bba, abbba\}$. Dessinez le diagramme de Hasse associé.

▶ **Exercice 2** ◀ Montrez pour pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

▶ **Exercice 3** ◀ Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$, défini inductivement par :

- La base est $\{\varepsilon\}$.
- Si $u \in \mathcal{M}$, alors $f(u) = uab$ et $g(u) = uc$ aussi.

On note t_n le nombre de mots de longueur n de $\mathcal{M}$.

(a) Ecrire les mots de $\mathcal{M}$ de longueur 0, 1, 2 et 3. En déduire les premières valeurs de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrez qu'aucun mot de $\mathcal{M}$ ne termine par a.

(c) Montrez que l'induction est libre.

(d) En déduire que pour $n \geq 2$, $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$.

(e) Calculez $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

(f) On définit inductivement la fonction ϕ de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- $\phi(\varepsilon) = 1$;
- $\phi(f(u)) = 4\,\phi(u)$;
- $\phi(g(u)) = 2\,\phi(u)$.

Explicitez le calcul de $\phi(cababc)$. Montrez que pour tout $u \in \mathcal{M}$, $\phi(u) = 2^{|u|}$.

▶ **Exercice 4** ◀ On considère l'ensemble $\mathbb{F}$ des formules arithmétiques, qui sont les mots sur l'alphabet $\{x, y, [,], +, \times, ^2\}$ définis inductivement par

- La base est $\{x, y\}$.
- Si $u, v \in \mathbb{F}$ alors les mots $f(u, v) = [u + v]$, $g(u, v) = [u \times v]$ et $h(u) = [u]^2$ aussi.

(a) Donnez un mot de longueur 5 qui est dans $\mathbb{F}$ et un qui n'est pas dans $\mathbb{F}$.

(b) Montrez que l'induction est libre.

(c) Définir inductivement une fonction ϕ de $\mathbb{F} \to \mathbb{N}$ qui renvoie le calcul de la formule quand on remplace x par 5 et y par 2. Par exemple, $\phi\big([[x+y] \times [y]^2]\big) = 28$.

(d) Définir inductivement une fonction ψ de $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ qui simplifie le mot en appliquant **autant que possible** la règle $g(u, u) \to [u]^2$. On doit trouver, par exemple, que

$$\psi([[[x \times x] \times [x]^2] + y]) = [[[x]^2]^2 + y].$$