Maths pour l'Info 3

– L2 –
2012-2013

TD n° 1: ordres

▶ **Exercice 1** ◀ On considère la relation $\mathcal{R}$ "est diviseur de" sur les entiers strictement positifs, définie pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ par

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}^*, mk = n.$$

(a) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(b) Est-ce un ordre total ?

(c) Pour cet ordre, l'ensemble $\mathcal{I}$ des nombres impairs a-t-il un majorant ? un minorant ?

(d) Est-ce un ordre bien fondé ?

(e) Quels sont les éléments minimaux de $F = \{n \mid n \geq 2\}$ pour cet ordre ?

▶ **Exercice 2** ◀ Montrez que si $(E, \prec)$ est strictement ordonné, alors $\prec$ est antisymétrique.

▶ **Exercice 3** ◀ Soit F l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$:

$$F = \{X \subset \mathbb{R} \mid X \neq \emptyset\}.$$

(a) Montrez que l'inclusion $\subset$ est un ordre sur F.

(b) Est-ce un ordre total ?

(c) Est-ce un ordre bien fondé ?

(d) Quels sont les éléments minimaux de F pour $\subset$?

▶ **Exercice 4** ◀ Soit $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}^0$ par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0,\ f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0) \leq g(0).$$

Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ?

▶ **Exercice 5** ◀ Montrez que le programme récursif suivant, qui calcule la fonction dite *fonction d'Ackermann*, se termine toujours si on lui donne en argument deux entiers positifs :

```
int Ackermann(m,n){
  int x;
  if (m==0)
    return n+1;
  if (n==0)
    return Ackermann(m-1,1);
  else {
    x = Ackermann(m,n-1);
    return Ackermann(m-1,x);
  }
}
```

▶ **Exercice 6** ◀ Soit A un alphabet. On considère l'ordre $\leq_{\text{pref}}$ sur les mots de A^* défini par

$$\forall u, v \in A^*\ u \leq_{\text{pref}} v \Leftrightarrow u \text{ est préfixe de } v.$$

Montrez que $\leq_{\text{pref}}$ est un ordre bien fondé sur A^*.

▶ **Exercice 7** ◀ Soit A un alphabet. On considère l'ordre $\preccurlyeq$ sur les mots de A^* défini par

$$\forall u, v \in A^*,\ u \preccurlyeq v \Leftrightarrow |u| < |v| \text{ ou } u = v.$$

(a) Montrez que $\preccurlyeq$ est un ordre.

(b) Est-ce un ordre bien fondé ?