MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Considérons les deux bases $E = (e_1, e_2, e_3)$ et $F = (f_1, f_2, f_3)$ de l'espace vectoriels $\mathbb{R}^3$, avec

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

et

$$f_1 = (1, 1, 0), \quad e_2 = (1, 0, 1), \quad e_3 = (0, 1, 1).$$

a) Calculer la matrice de passage A_E^F de la base E à la base F.

b) Calculer la matrice de passage A_F^E de la base F à la base E.

c) Quelle est la relation entre les deux matrices ?

Exercice 2 Déterminer si les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}[x]$ dans les cas suivants :

a) $P = 3-2x+4x^2+x^3, \quad Q = 4-x+6x^2+x^3 \quad \text{et} \quad R = 7-8x+8x^2+3x^3,$

b) $P = 1+3x-3x^2+x^3, \quad Q = 2+8x-x^2+x^3 \quad \text{et} \quad R = 5+9x-4x^2+2x^3,$

c) $P = 3 - x + 4x^4, \quad Q = 7 + 2x + x^3 \quad \text{et} \quad R = -9 + 107x + 2x^2.$

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites numériques réelles.

Rappel : les opérations sont définies par
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Considérons le sous-ensemble $\mathfrak{L}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites ayant seulement un nombre fini d'éléments non nuls, c'est-à-dire

$$\mathfrak{L} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists\, m > 0 \text{ tel que } a_m = a_{m+1} = \cdots = 0\}\,.$$

a) Montrer que $\mathfrak{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Pour tout $k \geq 1$ soit B_k la suite

$$B_k = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots)$$

Les suites $B_1, B_2, \ldots, B_n$, avec $n \geq 2$ sont-elles linéairement indépendantes ?

c) La suite de suites $(B_1, B_2, B_3, \ldots) \in \mathfrak{L}^{\mathbb{N}}$ est-elle une base de $\mathfrak{L}$?

Exercice 4 Déterminer parmi les applications suivantes celles qui sont linéaires.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^3 & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b,c) & \mapsto & a + 2b - c \end{array}$

- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$

- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\frac{a}{a^2+b^2+1}, \frac{b}{a^2+b^2+1}\right) \end{array}$

- $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b,c) & \mapsto & (a + 2b, 1 - c) \end{array}$

- $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^3 \\ (a,b) & \mapsto & (a + ib, a - ib, b) \end{array}$

- $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^3 & \to & \mathbb{Q}^3 \\ (a,b,c) & \mapsto & (a + 2b, a - c, a + b + c) \end{array}$

Exercice 5 Soient f et k les applications linéaires comme dans l'exercice précédente. Déterminer l'application $f \circ k$. Est-elle une application linéaire ?

Exercice 6 Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Posons $\operatorname{End}(\mathfrak{L}), \operatorname{Aut}(\mathfrak{L})$ et $H(\mathfrak{L})$ respectivement l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{L}$, l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{L}$ et l'ensemble des homothéties de $\mathfrak{L}$.

a) $\operatorname{Aut}(\mathfrak{L})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\operatorname{End}(\mathfrak{L})$?

b) $H(\mathfrak{L})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\operatorname{End}(\mathfrak{L})$?

Exercice 7 (Applications hôtelières d'Hilbert) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que les applications suivantes sont linéaires ($\mathbb{N}$ dénotera ici les entiers positifs, donc on commencera par 1).

- $$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i \end{array}$$

- $$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^3 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (a_1, a_2, a_3) \end{array}$$

- $$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_n = a_{n-1} & \forall\, n \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

- $$i: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \begin{cases} b_{2n+1} = 0 & \forall\, n \geq 0 \\ b_{2n} = a_n & \forall\, n \geq 1 \end{cases} \end{array}$$