MAT1260 - Algèbre linéaire II

Feuille d'exercices 8

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Exercice 1 (Changement de base) Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur $\mathfrak{L}$. Soient E, E' deux bases de $\mathfrak{L}$ et A, A' les matrices de b dans ces deux bases. Démontrer que

$$A' = P^\top AP$$

où P est la matrice de passage de E à E'.

Exercice 2 (Formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$) Démontrer que les formes bilinéaires symétriques sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont toutes et seules de la forme

$$\begin{array}{rccl} b: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) & \to & \alpha\, x_1x_2 \;+\; \beta\,(x_1y_2 + x_2y_1) \;+\; \gamma\, y_1y_2 \end{array}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Orthogonalité dans les espaces euclidiens) Soit $\mathfrak{L}$ un espace euclidien et $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

a) Démontrer que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp = \{\vec{0}\}$.

b) Démontrer que $\mathfrak{M} \subset \big(\mathfrak{M}^\perp\big)^\perp$.

Exercice 4 (Orthogonalité dans les espaces quadratiques) Soit $\mathfrak{L}$ un espace quadratique et $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. Démontrer que $\mathfrak{M}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.

Exercice 5 (Matrices congruentes) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$ un entier. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^\top AP$.

Démontrer que la relation de congruence $A \sim B$ si A est congruente à B est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que

i) pour toute $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on a $A \sim A$;

ii) pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on a $\big(A \sim B \ \Rightarrow\ B \sim A\big)$;

iii) pour toutes $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ on a $\big(A \sim B \text{ et } B \sim C \ \Rightarrow\ A \sim C\big)$.

Exercice 6 (Formes quadratiques équivalentes) Démontrer que deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si les matrices associées aux deux formes dans une même base sont congruentes.