Algèbre Linéaire II (MAT 1260) - Hiver 2017

Devoir 1

janvier 2017

Consignes : Ce devoir doit être rendu soit

- à la démonstratrice **au début** de la séance de Travaux Pratiques du **20 janvier 2017**,
- en utilisant la boîte pour la remise des travaux étudiants (à côté de PK-4150) **avant 10h** de **20 janvier 2017**.

Répondre aux questions en donnant toutes les justifications nécessaires. La pondération est telle que la note finale peut excéder 100 points (et cela n'est pas une erreur !)

Exercice 1 (15 points) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

On définit le *produit* $\mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$ comme l'ensemble

$$\mathfrak{L} \times \mathfrak{M} = \{(\ell, m) \mid \ell \in \mathfrak{L} \text{ et } m \in \mathfrak{M}\}.$$

Montrer que cet ensemble, muni des deux opérations suivantes

- $(\ell_1, m_1) + (\ell_2, m_2) := (\ell_1 + \ell_2, m_1 + m_2) \quad \forall\, \ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{L},\ m_1, m_2 \in \mathfrak{M}$,
- $\alpha(\ell, m) := (\alpha\ell, \alpha m) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \ell \in \mathfrak{L},\ m \in \mathfrak{M}$.

est un espace vectoriel et trouver l'élément neutre $\vec{0}_{\mathfrak{L}\times\mathfrak{M}}$ de la première opération.

Exercice 2 (20 points) Considérons un espace vectoriel $(\mathfrak{L}, +, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et un vecteur $\varepsilon \in \mathfrak{L}$. Démontrer que les opérations

$$\begin{aligned} \oplus : \quad & \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L} \\ & (\ell, m) \mapsto \ell + m - \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \odot : \quad & \mathbb{K} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L} \\ & (\alpha, \ell) \mapsto \alpha \cdot \ell + (1 - \alpha) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

définissent sur $\mathfrak{L}$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 3 (20 points) Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{L} = \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ des matrices carrées 3×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'ensemble $\mathfrak{M}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$? Justifier votre réponse.

Dans les exercices qui suivent on identifiera les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$ comme vu dans le cours, c'est-à-dire en notant par $\vec{x}$ à la fois le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (20 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{L} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (20 points) Soient ℓ, m les deux vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$

$$\ell_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le sous-espace vectoriel span $\{\ell_1, \ell_2\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (15 points) Soient $\mathfrak{M}$ le sous-espace vectoriel défini dans l'Exercice 3 et $\mathfrak{N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathfrak{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

i) Calculer $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$.

ii) Calculer $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$.

iii) Les deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?