MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Devoir 2

mars 2017

<u>Consignes</u> : Ce devoir doit être rendu avant **9h00** de **lundi 6 mars 2017** soit :

- en utilisant la boîte pour la remise des travaux étudiants (à côté de PK-5120),
- en pièce jointe par courriel aux adresses `francesco.dolce@lacim.ca` **<u>et</u>** `nadia.l@lacim.ca`,
- au chargé du cours **<u>au début</u>** de la séance du cours.

Répondez aux questions en donnant toutes les justifications nécessaires. La pondération est telle que la note finale peut excéder 100 points.

Exercice 1 (20 points) Considérons les vecteur de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ suivants

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les vecteurs A_1, A_2, A_3 et A_4 sont linéairement indépendants.

b) Calculer span $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

c) Énoncer le Théorème de la base incomplète.
Donner un exemple en utilisant les points précédents.

Exercice 2 (70 points) Considérons l'ensemble

$$\mathcal{C}'(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ dérivable } \} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

Rappelons que tout polynôme $P = a_0 + a_1 x + \cdots a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ peut être identifié avec la fonction (notée aussi P) définie par

$$\begin{array}{rccl} P : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \beta & \mapsto & a_0 + a_1\beta + \cdots + a_k\beta^k \end{array}$$

Dans la suite on considère donc $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ comme sous-ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

(Rappel : $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ sont respectivement l'ensemble de tous les polynômes et l'ensemble des polynômes de degré au plus n à coefficients réels dans la variable x.)

a) Montrer que $\mathcal{C}'(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $\mathbb{R}[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}'$. Quelle est sa dimension sur $\mathbb{R}$?

c) Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

d) Prouver que $(1, x, \ldots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. En déduire la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$.

e) Considérons l'application

$$\begin{array}{rccl} \frac{d}{dx} : & \mathcal{C}'(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ & u & \mapsto & \frac{d}{dx}(u) = u' \end{array}$$

Montrer que $\frac{d}{dx} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{C}'(\mathbb{R}), \mathcal{F}(\mathbb{R})\right)$.

f) Montrer que la restriction de $\frac{d}{dx}$ à $\mathbb{R}[x]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
(Rappel : la dérivée d'un polynôme est encore un polynôme.)

g) Calculer $\operatorname{Ker}\left(\frac{d}{dx}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{d}{dx}\right)$ pour $\frac{d}{dx} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}[x])$. Quelles sont les dimension de deux sous-espaces ?

h) Montrer que la restriction de $\frac{d}{dx}$ à $\mathbb{R}_n[x]$ est un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[x]$.

i) Calculer $\operatorname{Ker}\left(\frac{d}{dx}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\frac{d}{dx}\right)$ pour $\frac{d}{dx} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}_n[x])$. Quelles sont les dimension de deux sous-espaces ?

j) Calculer la matrice associée à $\frac{d}{dx} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}_n[x])$ dans la base $(1, x, \ldots, x^n)$.

Exercice 3 (20 points) Soit $s \in \operatorname{End}(\mathfrak{L})$ avec $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Prouver que

$$s \text{ est une involution de } \mathfrak{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{L} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}).$$

Par faire cela vous pouvez, par exemple, démontrer les points suivants :

a) Si $\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}})$ alors $s \circ s = \mathrm{id}$.

b) Si $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$ alors

   i) $\mathfrak{L} \subset \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) + \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}})$,

   (Indice : tout vecteur ℓ peut s'écrire comme $\frac{1}{2}(\ell + \ell + s(\ell) - s(\ell))$.)

   ii) $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) + \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \subset \mathfrak{L}$,

   iii) $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \cap \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}) \subset \{\vec{0}\}$.