MAT1260 - Algèbre linéaire II

UQÀM

Examen final

28 avril 2017

Consignes : Vous n'avez droit à aucun document (notes de cours, livres, etc.) ni appareil électronique (tablette, cellulaire, calculatrice, etc.).

Répondez aux questions en donnant toutes les justifications nécessaires. La pondération est telle que la note finale peut excéder 100 points.

L'évaluation tiendra compte de l'exactitude du raisonnement ainsi que de la clarté de la rédaction (qualité du français écrit, bon usage du langage et des symboles mathématiques).

Exercice 1 (10 points) Soit $\mathfrak{L}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Considérons un endomorphisme $g \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{L})$ tel que

$$g^3 = g^2 + 4g - 2\mathrm{id}_{\mathfrak{L}}.$$

Montrer que g est inversible et déterminer l'endomorphisme g^{-1} en fonction de g.

Exercice 2 (65 points) Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ ayant comme matrice associée dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}\,(\mathbb{R})\,.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

b) Déterminer Spect (f).
c) Calculer le polynôme minimal de f.
d) Montrer qu'il existe un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\ell) \neq \vec{0}$.
e) Soit $\ell \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\ell) \neq 0$. Montrer que $(\ell, f(\ell), f^2(\ell))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
f) Calculer la matrice B associée à f dans la base du point précédent.
g) Déterminer la décomposition de Dunford de f.
h) Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3 (15 points) Montrer que les matrices A, B données ci-dessous sont conjuguées

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -8 & -15 & 8 \\ -10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

[*Rappel* : Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont dites *conjuguées* s'il existe une matrice inversible $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = T^{-1}AT$.

Exercice 4 (20 points) Soit f un endomorphisme dans un espace de dimension 8 ayant comme polynôme caractéristique et polynôme minimal respectivement

$$p_f = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^2 \qquad \text{et} \qquad m_f = (x-1)^2(x-2)^2(x-3).$$

a) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
(*Suggestion* : un simple argument théorique suffit pour répondre à cette question.)
b) S'il est diagonalisable donner une réduction possible de la matrice associée sous forme diagonale. Sinon, donner une réduction possible de la matrice associée sous forme de Jordan ?

Exercice 5 (10 points) Soit $\mathfrak{L}$ un espace quadratique pour une certaine forme quadratique $q : \mathfrak{L} \to \mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. Montrer que $\mathfrak{M}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$.
(*Rappel* : l'ensemble orthogonale $\mathfrak{M}^\perp$ est l'ensemble

$$\mathfrak{M}^\perp = \{\ell \in \mathfrak{L} \mid b(\ell, m) = 0 \text{ pour tous } m \in \mathfrak{M}\}$$

où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q.)