Cenni sulla teoria dei nodi

Definizioni, Mosse di Reidemeister, Operazioni sui nodi

Francesco Dolce

unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni

19 maggio 2009

Nodi e Link

Nodi

Definizione

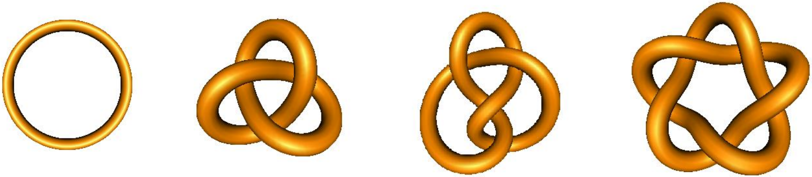
Un *nodo* K è una curva chiusa semplice in $\mathbb{R}^3$. Ovvero K è detto nodo se $\exists\ \varphi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ immersione con $\varphi(S^1) = K$.

Nodi e Link

Nodi

Definizione

Un *nodo* K è una curva chiusa semplice in $\mathbb{R}^3$. Ovvero K è detto nodo se $\exists\ \varphi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ immersione con $\varphi(S^1) = K$.



Nodi e Link

Link

Definizione

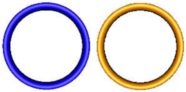
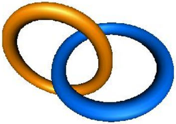
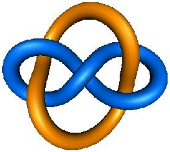
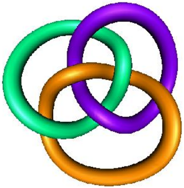
Un *link* L di m componenti è un'unione disgiunta di m nodi. Ovvero $L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m$ con $K_i \cap K_j = \emptyset \; \forall \, i \neq j$.

Nodi e Link

Link

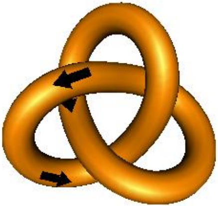
Definizione

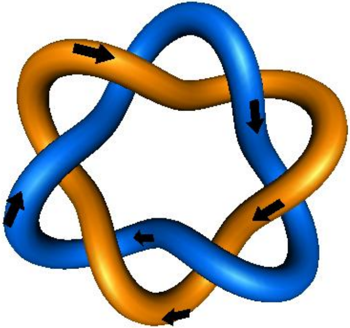
Un *link* L di m componenti è un'unione disgiunta di m nodi. Ovvero $L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m$ con $K_i \cap K_j = \emptyset \; \forall \, i \neq j$.

Nodi e Link

Nodi orientati



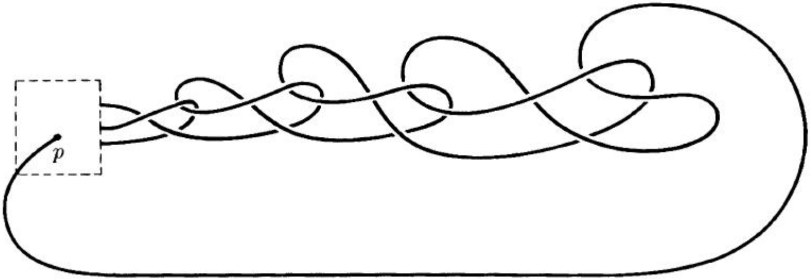


Nodi selvaggi e nodi domestici

Nodi selvaggi

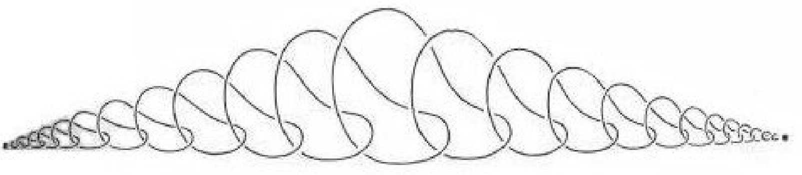
Nodi selvaggi e nodi domestici

Nodi selvaggi



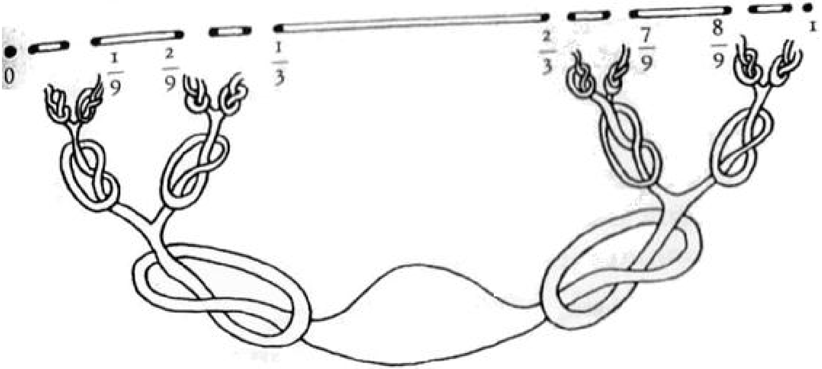
Nodi selvaggi e nodi domestici

Nodi selvaggi



Nodi selvaggi e nodi domestici

Nodi selvaggi



Nodi selvaggi e nodi domestici

Nodi domestici

Definizione

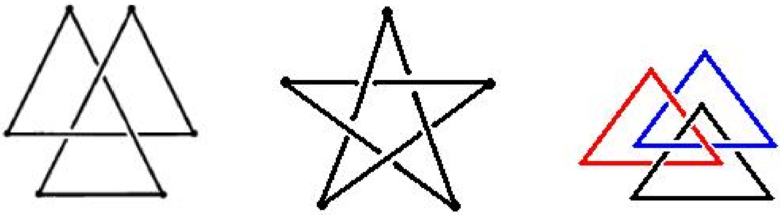
Un *nodo poligonale* K è una linea spezzata chiusa in $\mathbb{R}^3$

Nodi selvaggi e nodi domestici

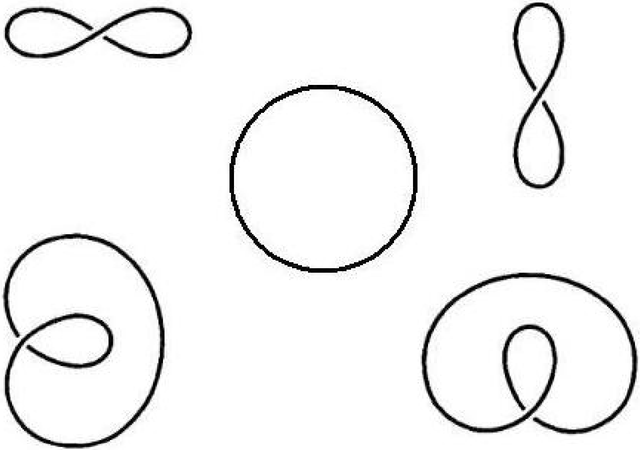
Nodi domestici

Definizione

Un *nodo poligonale* K è una linea spezzata chiusa in $\mathbb{R}^3$

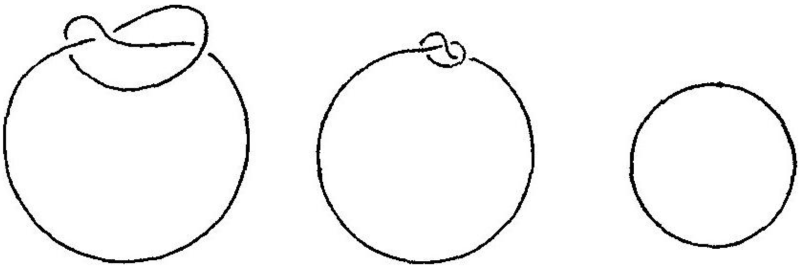


Equivalenza tra nodi



Equivalenza tra nodi

Omotopia?



Equivalenza tra nodi

Isotopia ambiente

Definizione

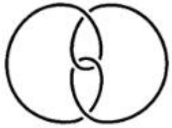
I nodi K_1 e K_2, sono *equivalenti* se sono vi è una isotopia ambiente tra i due. Ovvero se se $\exists\, H$ isotopia tale che $h_0 = id$ e $h_1 \circ \varphi_1 = \varphi_2$, con φ_1 e φ_2 immersioni che portano S^1 rispettivamente in K_1 e K_2.

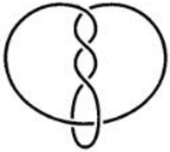
Equivalenza tra nodi

Isotopia ambiente

Definizione

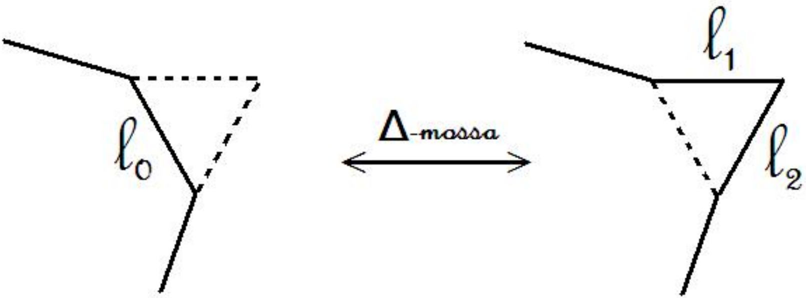
I nodi K_1 e K_2, sono *equivalenti* se sono vi è una isotopia ambiente tra i due. Ovvero se se $\exists\, H$ isotopia tale che $h_0 = id$ e $h_1 \circ \varphi_1 = \varphi_2$, con φ_1 e φ_2 immersioni che portano S^1 rispettivamente in K_1 e K_2.





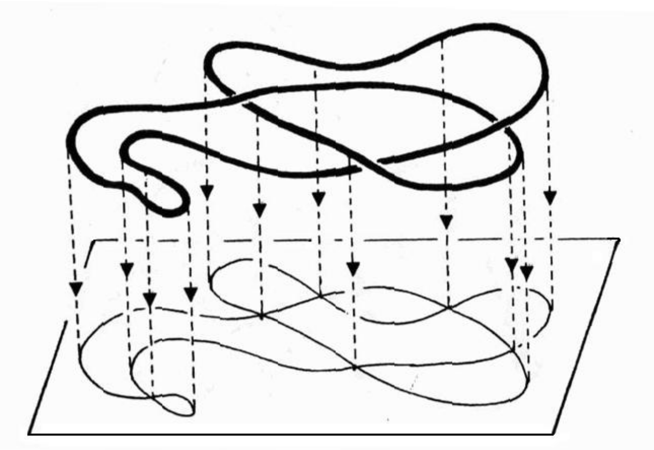
Equivalenza tra nodi

Δ-*mosse*



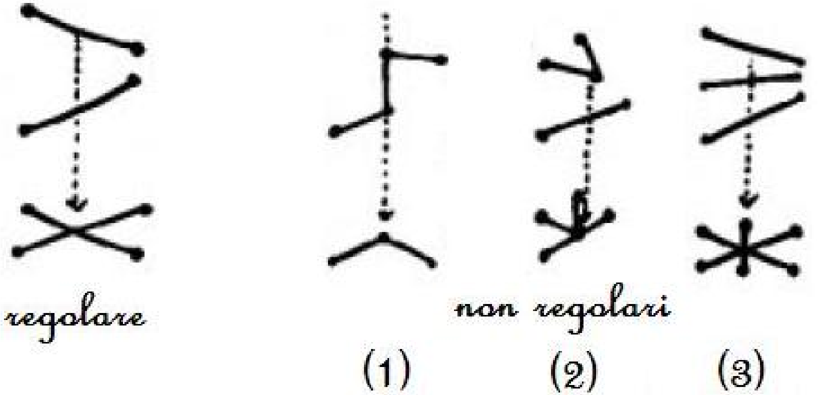
Proiezioni

Proiezioni su un piano



Proiezioni

Proiezioni regolari



Proiezioni

Proiezioni regolari

Proposizione

- se $\pi(K)$ è irregolare, $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che è possibile applicare una ε-perturbazione in modo da ottenere una proiezione regolare;
- se $\pi(K)$ è regolare allora $\exists\ \delta > 0$, tale che $\forall\ \varepsilon < \delta$ applicando una ε-perturbazione si ottiene ancora una proiezione regolare.

Le proiezioni regolari sono dunque *generiche*.

Proiezioni

Diagrammi piani

Proiezioni

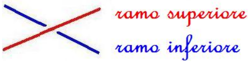
Diagrammi piani

Definizione

Una proiezione regolare di un nodo con informazioni sugli incroci è detto *diagramma piano* del nodo.

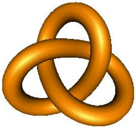
Proiezioni

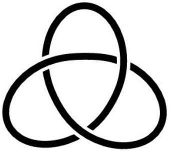
Diagrammi piani



Definizione

Una proiezione regolare di un nodo con informazioni sugli incroci è detto *diagramma piano* del nodo.





Proiezioni

Nodi alterni

Definizione

Un diagramma di K è detto *diagramma alterno* se scegliendo un verso di percorrenza si alternano rami superiori a rami inferiori. Se K possiede un diagramma alterno è detto *nodo alterno*.

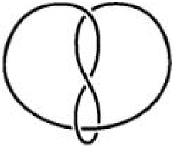


diagramma alterno

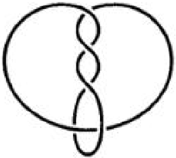
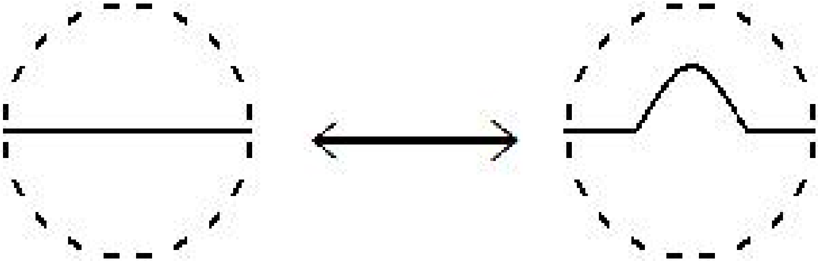


diagramma non alterno

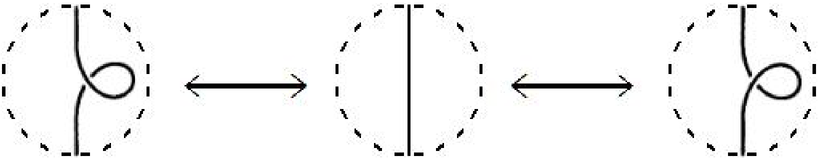
Mosse di Reidemeister

Ω_0 *Isotopia planare*



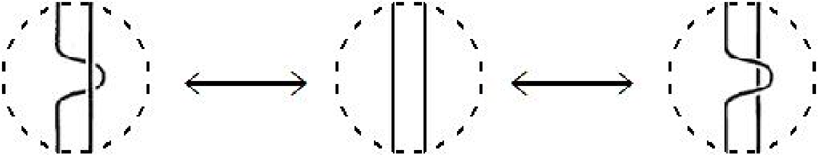
Mosse di Reidemeister

Ω_1 *Torcere*



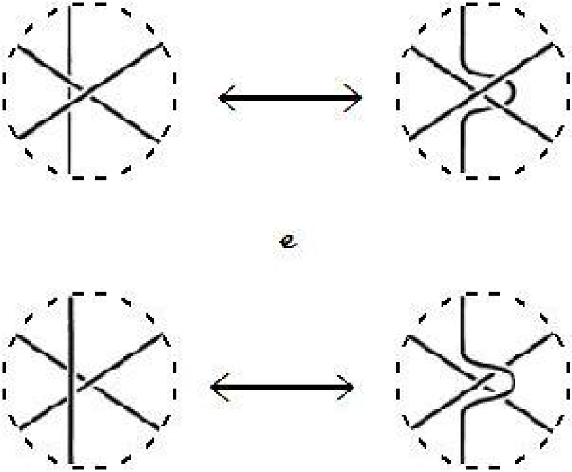
Mosse di Reidemeister

Ω_2 *Tirar fuori*

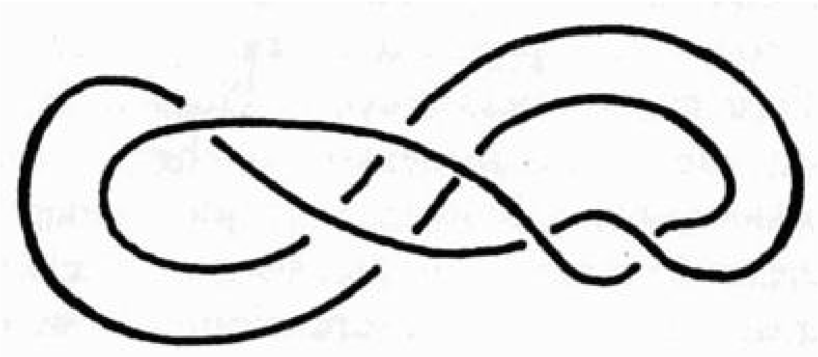


Mosse di Reidemeister

Ω_3 *Scivolare*

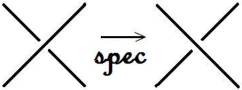


Mosse di Reidemeister



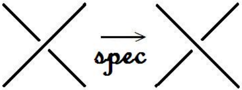
Modifica di un nodo

Immagine speculare



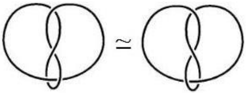
Modifica di un nodo

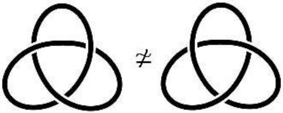
Immagine speculare



Definizione

Un nodo K è detto *achirale* se coincide con la sua immagine speculare. Un nodo non achirale è detto *chirale*.



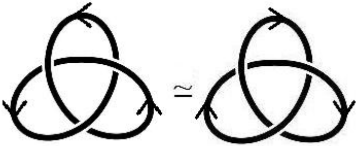


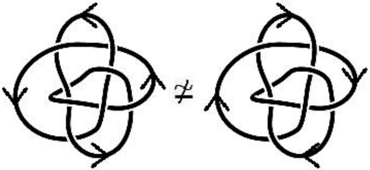
Modifica di un nodo

Opposto

Definizione

Dato un nodo K, si definisce il suo *opposto* $\overline{K}$ il nodo ottenuto orientando diversamente K.



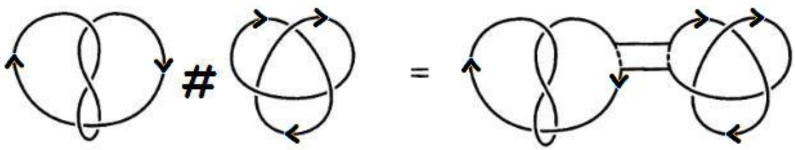


Somma connessa

Definizione

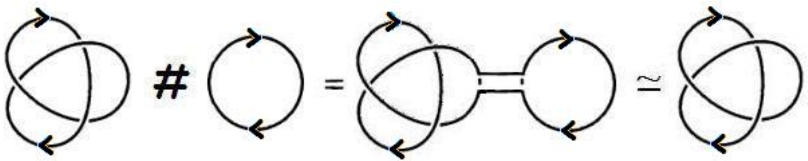
Definizione

Dati due nodi orientati J e K, si definisce *somma connessa* $J\#K$ il nodo ottenuto rimuovendo un piccolo arco da J ed uno da K e unendo i due estremi del primo nodo con quelli del secondo coerentemente.



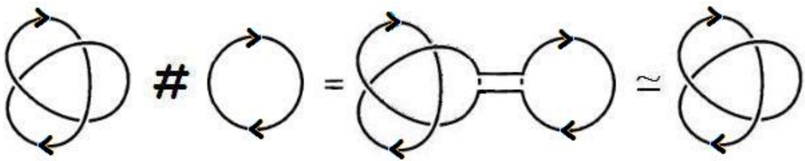
Somma connessa

Somma al non-nodo



Somma connessa

Somma al non-nodo

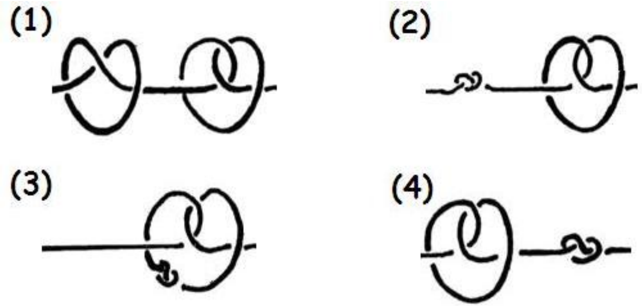


Definizione

K è detto *nodo primo* se $K = J_1 \# J_2 \quad \Rightarrow \quad J_1, J_2$ non-nodo.

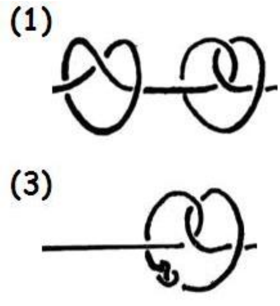
Somma connessa

Proprietà commutativa



Somma connessa

Proprietà commutativa



Teorema

$(\mathbb{K}, \#)$ è un semigruppo e la fattorizzazione in nodi primi è unica.

Domande?