Cenni sulla teoria dei nodi

Errata Corrige, Tabulazioni, Grafi planari

Francesco Dolce

unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni

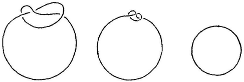
26 maggio 2009

Osservazioni sulla puntata precedente

Isotopia

Definizione (isotopia)

Due immersioni $\varphi_0, \varphi_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ sono dette *isotope* se $\exists\, F : S^1 \times I \to \mathbb{R}^3$ continua tale che $\forall\, t \in [0, 1]$ si ha $F(x, t)$ immersione.



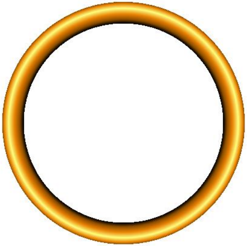
Definizione (isotopia ambiente)

Due immersioni $\varphi_0, \varphi_1 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ sono dette *ambientalmente isotope* se $\exists\, H : \mathbb{R}^3 \times I \to \mathbb{R}^3$ continua tale che $\forall\, t \in [0, 1]$ h_t è un omeomorfismo e inoltre $h_0 = id_{R^3}$ e $h_1 \varphi_0 = \varphi_1$.

Osservazioni sulla puntata precedente

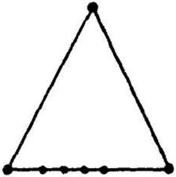
$(\mathbb{K}, \#) \quad \not\cong \quad (\mathbb{Z}, \cdot)$

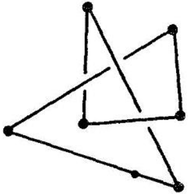
$$(+1) \cdot (+1) \quad = \quad 1 \quad = \quad (-1) \cdot (-1)$$

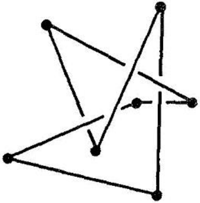


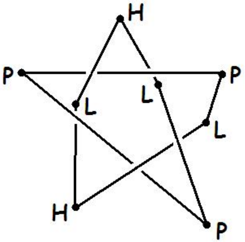
Osservazioni sulla puntata precedente

$s(K)$



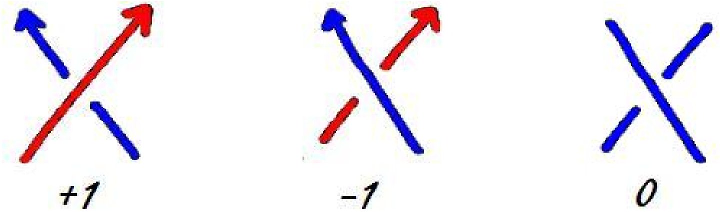






Osservazioni sulla puntata precedente

Lk(K)



Definizione

$$Lk(L) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \pi(L)} Lk(c)$$

Osservazioni sulla puntata precedente

p-colorabilità

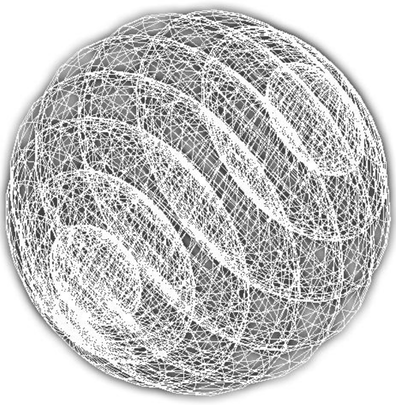
Definizione

Sia p un numero primo. Sia $T_p(D)$ l'insieme delle colorazioni degli archi di D con elementi in $\mathbb{Z}_p$, tali che ad ogni incrocio in cui A_i sia il ramo superiore e A_j, A_k i due archi rappresentanti il ramo inferiore, sia verificata l'equazione:

$$2x_i - x_j - x_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$$

Osservazioni sulla puntata precedente

4ª dimensione

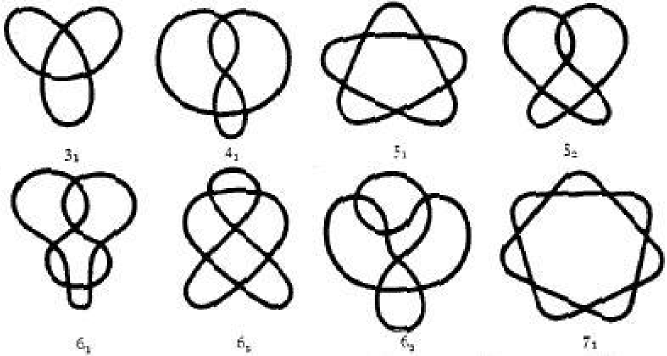


Notazione Alexander-Briggs

Knotentheorie - K. Reidemeister, 1932

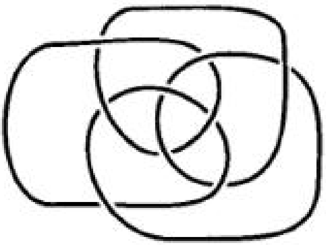
Knotentabelle.

Die Tabelle der folgenden Knotenprojektionen bis zu neun Überkreuzungen wurde der Arbeit von ALEXANDER und BRIGGS (5) entnommen. Verbessert wurden die Kurven 8_4 und 9_7, bei denen die Anzahl der Überkreuzungen nicht stimmte.



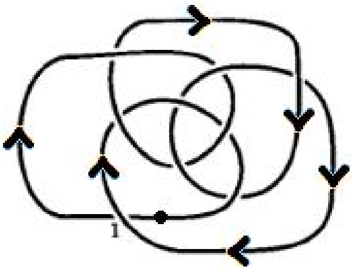
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



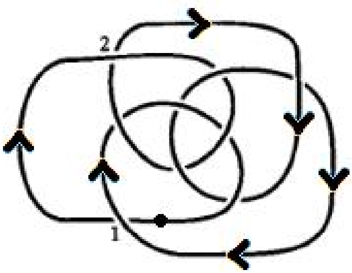
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



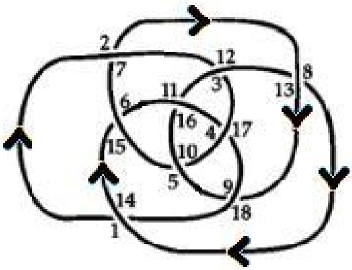
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



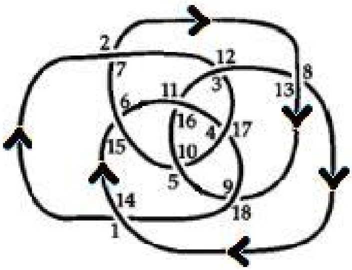
Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



Notazione Dowker

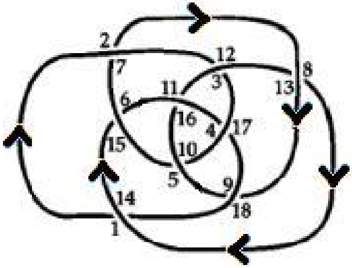
Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



1	3	5	7	9	11	13	15	17
14	12	10	2	18	16	8	6	4

Notazione Dowker

Nodo alterno - Dal diagramma alla notazione



14 12 10 2 18 16 8 6 4

Notazione Dowker

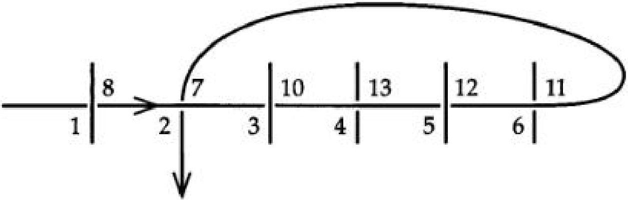
Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4

Notazione Dowker

Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

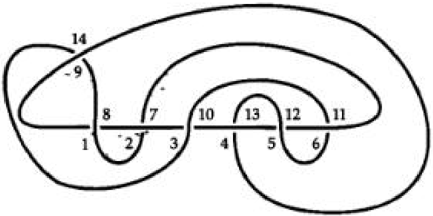
1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4



Notazione Dowker

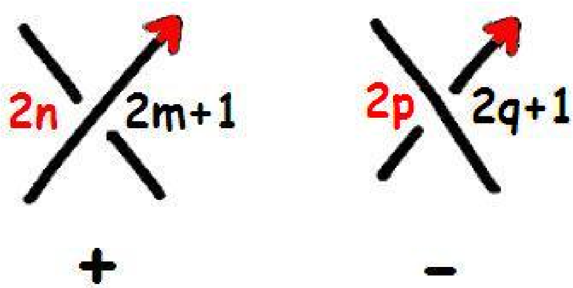
Nodo alterno - Dalla notazione al diagramma

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	6	4



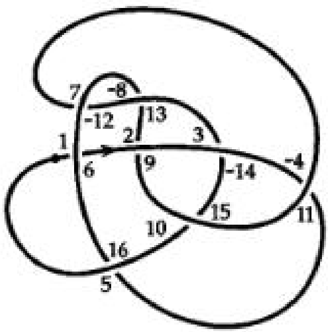
Notazione Dowker

Nodo non alterno



Notazione Dowker

Nodo non alterno



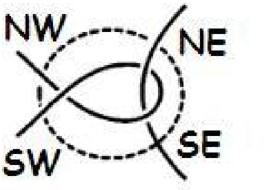
1	3	5	7	9	11	13	15
6	-14	16	-12	2	-4	-8	10

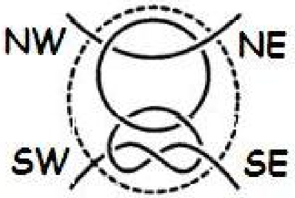
Notazione Conway

Grovigli - Definizione

Definizione

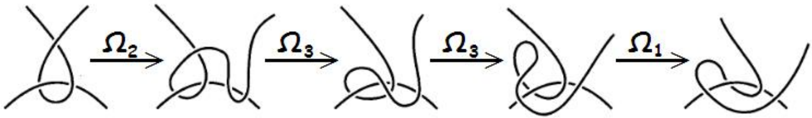
Un *groviglio* (o *tangle*) è una regione del piano delimitata da una circonferenza tale che il diagramma del link intersechi la circonferenza in esattamente 4 punti.





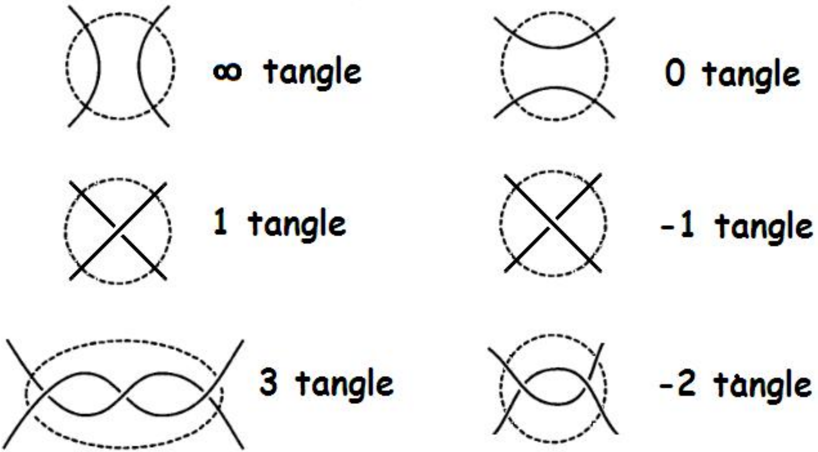
Notazione Conway

Grovigli - Mosse di Reidemeister



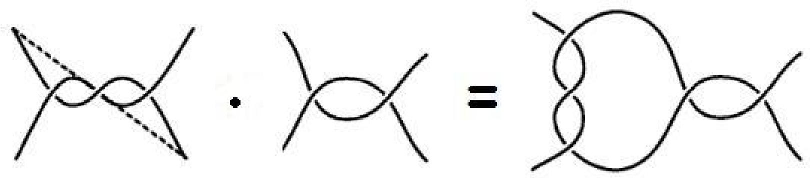
Notazione Conway

Grovigli - Notazione



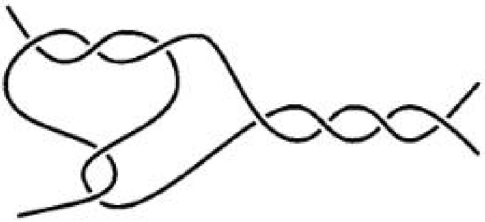
Notazione Conway

Grovigli - Moltiplicazione



Notazione Conway

Grovigli - Grovigli razionali



3 2 -4 tangle

Notazione Conway

Grovigli - Frazioni continue

Definizione

Dato il groviglio razionale con notazione $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ si considera il valore corrispondente alla frazione

$$\alpha_n + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \cdots \frac{1}{\alpha_1}}} \in \mathbb{Q}$$

Notazione Conway

Grovigli - Frazioni continue

Definizione

Dato il groviglio razionale con notazione $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ si considera il valore corrispondente alla frazione

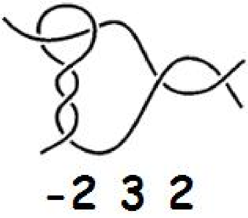
$$\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \cdots \frac{1}{\alpha_1}}} \in \mathbb{Q}$$

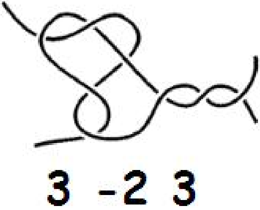
Teorema

Due grovigli razionali sono equivalenti se e solo se le due frazioni corrispondenti coincidono. (Burde e Zieschang, 1986)

Notazione Conway

Grovigli - Grovigli equivalenti





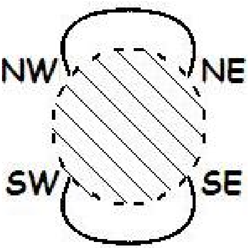
$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}} \quad = \quad \frac{12}{5} \quad = \quad 3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}}$$

Notazione Conway

Link razionali

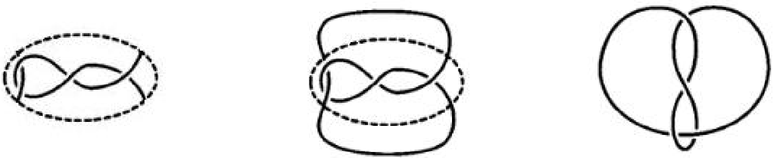
Definizione

Si definisce *link razionale* un link ottenuto partendo da un groviglio e collegando tra loro i rami **NE** e **NW** e i rami **SE** e **SW**, senza formare nuovi incroci.



Notazione Conway

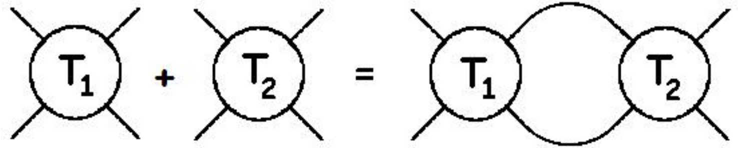
Link razionali - Esempio



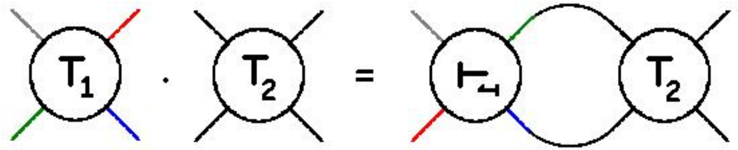
Notazione Conway

Grovigli - Operazioni

Addizione:



Moltiplicazione:



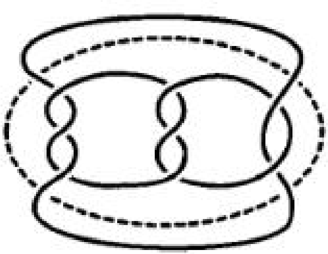
Notazione Conway

Grovigli - Nodi pretzel

Indichiamo con

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

il groviglio ottenuto da $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0$.



$3, 3, 2$ pretzel

Notazione Conway

Grovigli algebrici e Link algebrici

Definizione

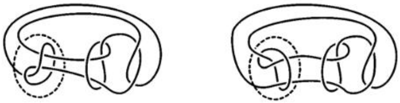
Si definisce *groviglio algebrico* un groviglio ottenuto da grovigli razionali sommati e moltiplicati tra loro.

Definizione

Si definisce *link algebrico* un link ottenuto partendo da un groviglio algebrico collegando tra loro i rami **NE** e **NW** e i rami **SE** e **SW**, senza formare nuovi incroci.

Notazione Conway

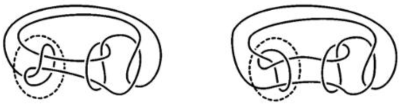
Grovigli mutanti



Mutanti di Kinoshita-Terasaka

Notazione Conway

Grovigli mutanti



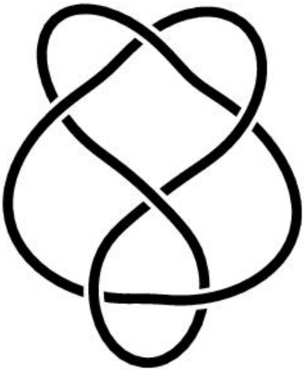
Mutanti di Kinoshita-Terasaka

Proprietà

- Il mutante di un nodo alterno è un nodo alterno.
- Il mutante di un nodo (link ad 1 componente) è un nodo.
- Il mutante di un nodo non banale è un nodo non banale.

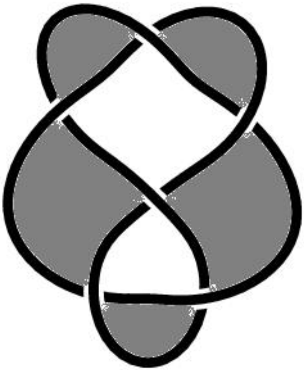
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



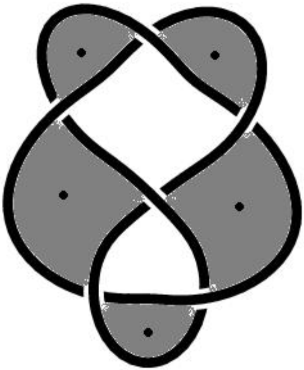
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



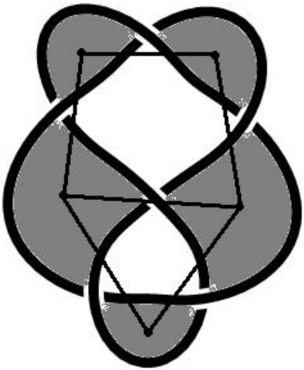
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



Grafi planari

Dal diagramma al grafo

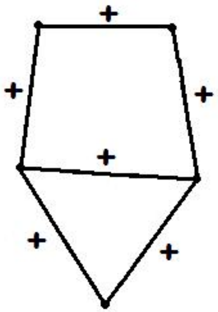


Grafi planari

Dal diagramma al grafo

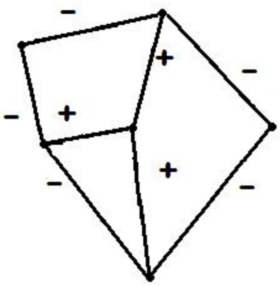
Grafi planari

Dal diagramma al grafo



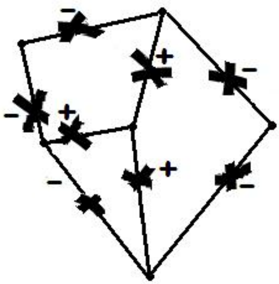
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



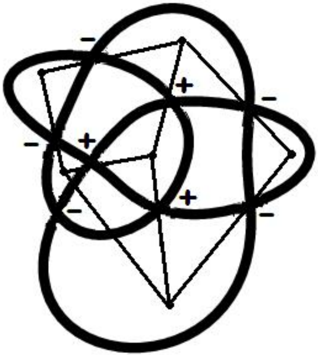
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



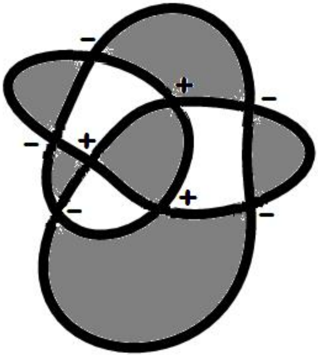
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



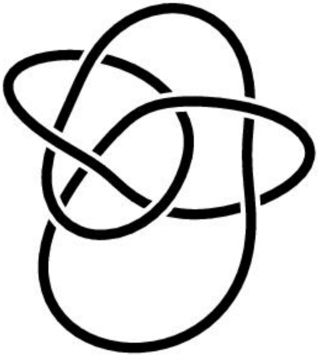
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



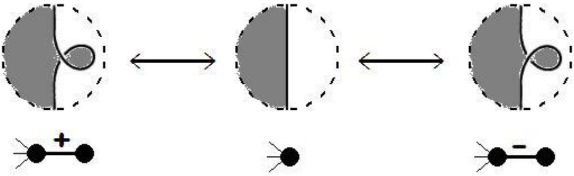
Grafi planari

Dal grafo al diagramma



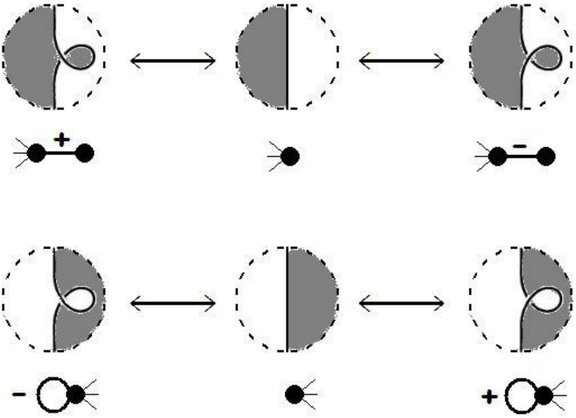
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_1



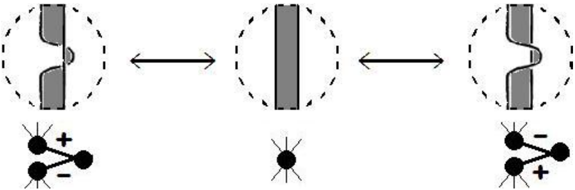
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_1



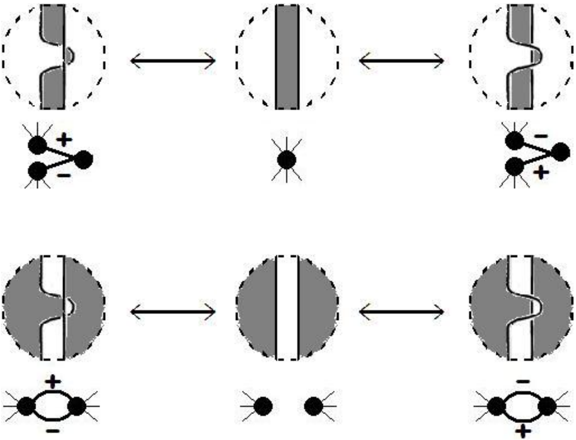
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_2



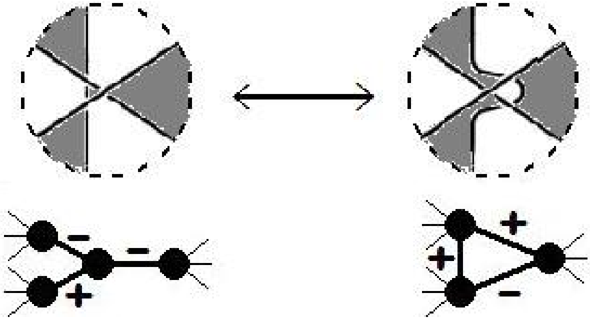
Grafi planari

Mosse di Reidemeister - Ω_2



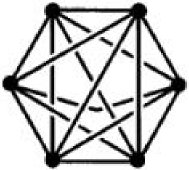
Grafi planari

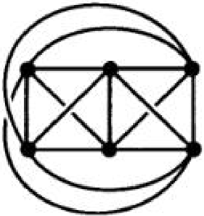
Mosse di Reidemeister - Ω_3

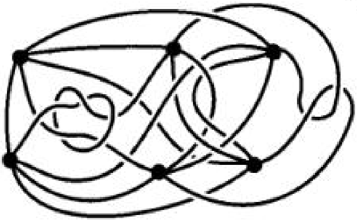


Grafi intrinsecamente annodati

Immersioni di un grafo

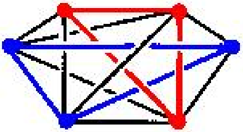


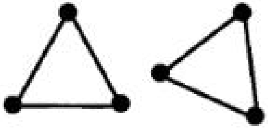


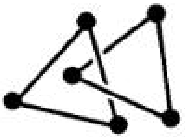


Grafi intrinsecamente annodati

Triangoli in un grafo





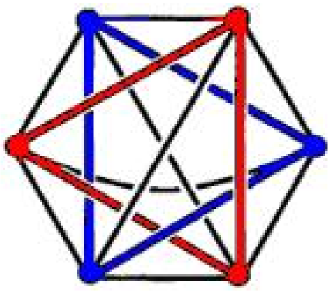


Grafi intrinsecamente annodati

Teorema di Conway-Gordon

Teorema

Ogni immersione di K_6 contiene almeno una coppia di triangoli concatenati. (Conway e Gordon, 1983)

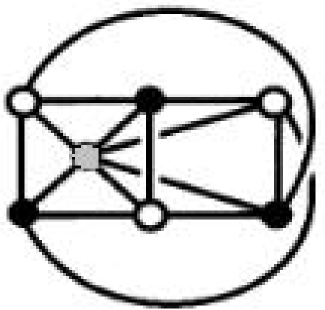


Grafi intrinsecamente annodati

Grafo intrinsecamente concatenato

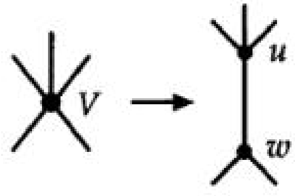
Definizione

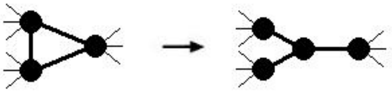
Un grafo è detto *intrinsecamente concatenato* se qualsiasi sua immersione in $\mathbb{R}^3$ contiene link non banali.



Grafi intrinsecamente annodati

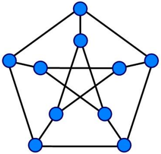
Operazioni sui grafi

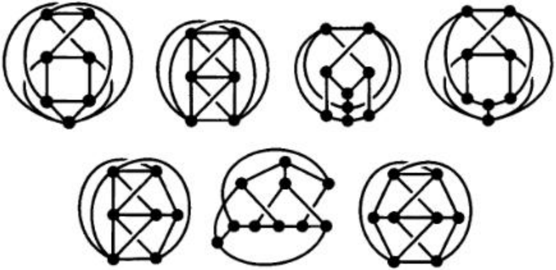




Grafi intrinsecamente annodati

Grafi di Petersen





Grafi intrinsecamente annodati

Teorema di Robertson

Teorema

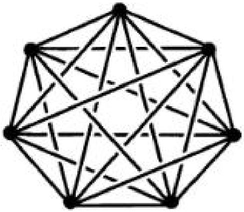
Un grafo G è intrinsecamente concatenato se e solo se contiene come sottografo il grafo di *Petersen* o una sua espansione. (Robertson et al., 1993)

Grafi intrinsecamente annodati

K_7

Teorema

Ogni immersione di K_7 contiene almeno un ciclo Hamiltoniano equivalente a un nodo non banale. (Conway e Gordon, 1983).



Grafi intrinsecamente annodati

Definizione

Definizione

Un grafo è detto *intrinsecamente annodato* se qualsiasi sua immersione in $\mathbb{R}^3$ contiene un ciclo (non per forza Hamiltoniano) annodato in maniera non banale.

Teorema

Un grafo intrinsecamente annodato è sempre intrinsecamente concatenato. (Robertson et al., 1993)

Domande?