Cenni sulla teoria dei nodi

Trecce, Superifici di Seifert, Gruppo di un nodo

Francesco Dolce

unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni

26 maggio 2009

Trecce

Definizione

Definizione

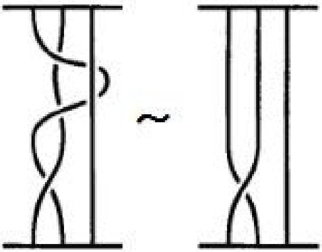
Consideriamo due linee parallele e su queste m punti distinti. Una *treccia* di m componenti (o m − *treccia*) è un insieme di m curve disgiunte, di estremi uno dei punti scelti sulla prima linea ed uno sulla seconda, tali da intersecare ogni piano parallelo compreso tra le due linee una ed una sola volta.

Trecce

Equivalenza tra trecce

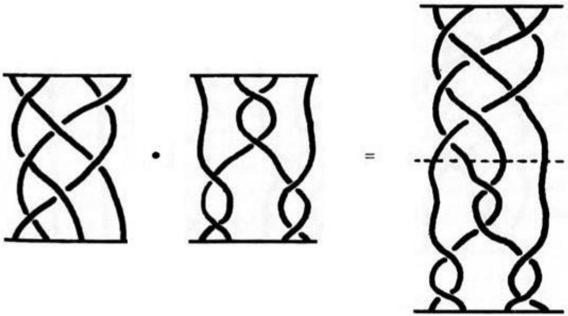
Definizione

Diremo che due trecce sono equivalenti se isotope l'una a l'altra in $\mathbb{R}^3$.



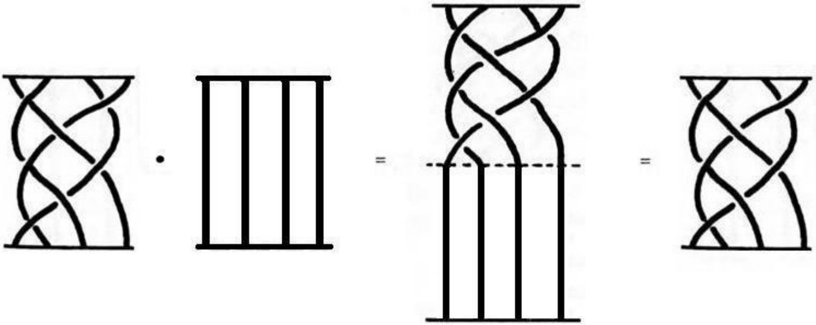
Trecce

Moltiplicazione tra trecce



Trecce

Moltiplicazione per e_m



Trecce

Teorema di Artin

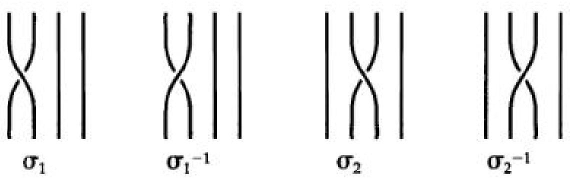
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- in generale $a \cdot b \neq b \cdot a$

Teorema

B_n è un gruppo non commutativo. (Artin, 1923)

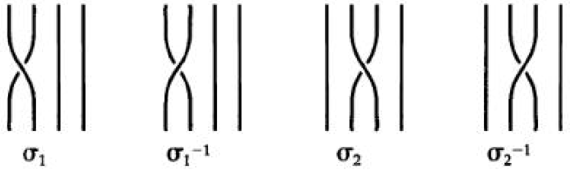
Trecce

Trecce elementari



Trecce

Trecce elementari



Esempio:

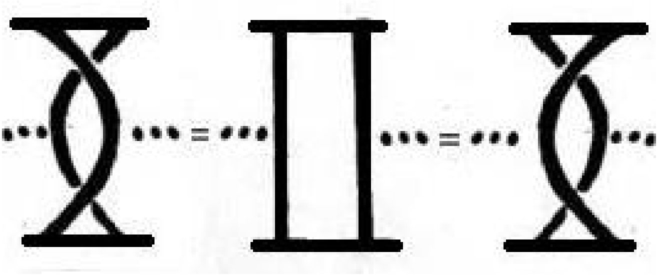
$\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_1\,\sigma_1$

Trecce

Proprietà

Proprietà

(i) $\sigma_i\sigma_i^{-1} = 1 = \sigma_i^{-1}\sigma_1 \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n-1$

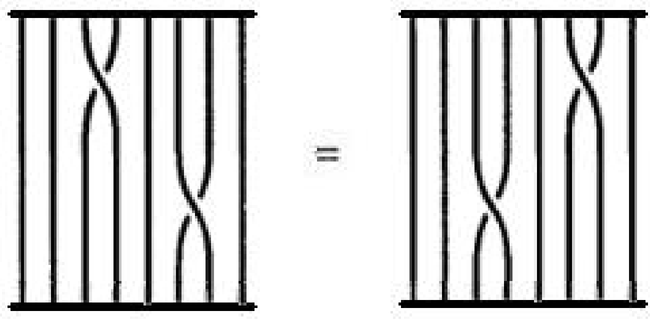


Trecce

Proprietà

Proprietà

(ii) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ se $|i - j| > 1$ (commutatività lontana)

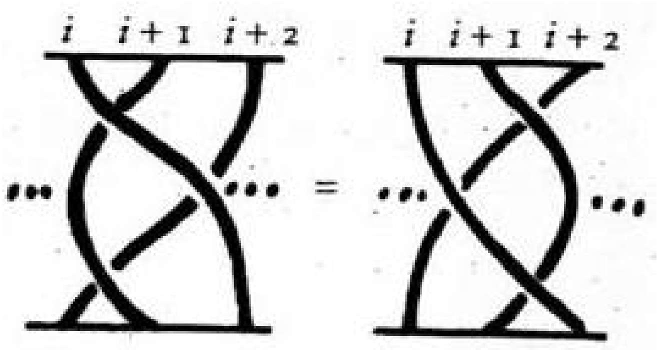


Trecce

Proprietà

Proprietà

(iii) $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma i\sigma_{i+1}$ (relazione di Artin)

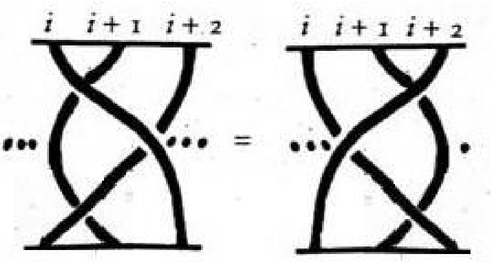


Trecce

Proprietà

Osservazione

$$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = (\sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i)\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,(\sigma_i\,\sigma_i^{-1}) = \sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

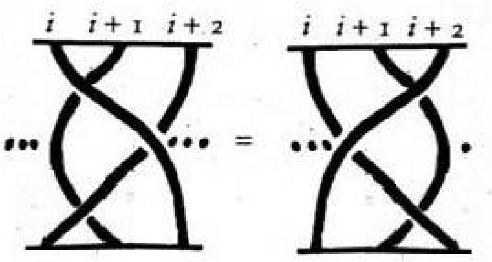


Trecce

Proprietà

Osservazione

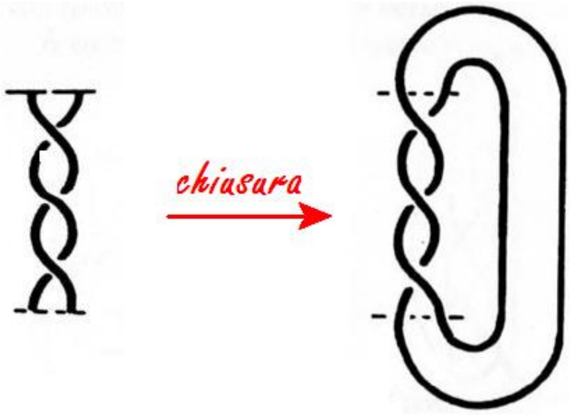
$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = (\sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i)\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,(\sigma_i\,\sigma_i^{-1}) = \sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$



Similmente si ha $\sigma_i^{-1}\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}$

Chiusura di una treccia

Definizione



Chiusura di una treccia

Teorema di Alexander

Teorema

Ogni link è ottenibile dalla chiusura di un'opportuna treccia. (Alexander, 1923)

Chiusura di una treccia

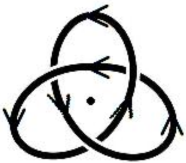
Teorema di Alexander

Teorema

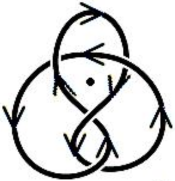
Ogni link è ottenibile dalla chiusura di un'opportuna treccia. (Alexander, 1923)

Dimostrazione (idea)

Bisogna considerare due casi:



arrotolato

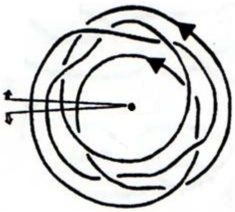


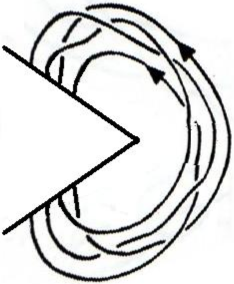
non arrotolato

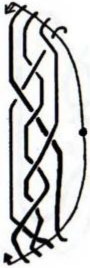
Chiusura di una treccia

Teorema di Alexander

- nodo arrotolato



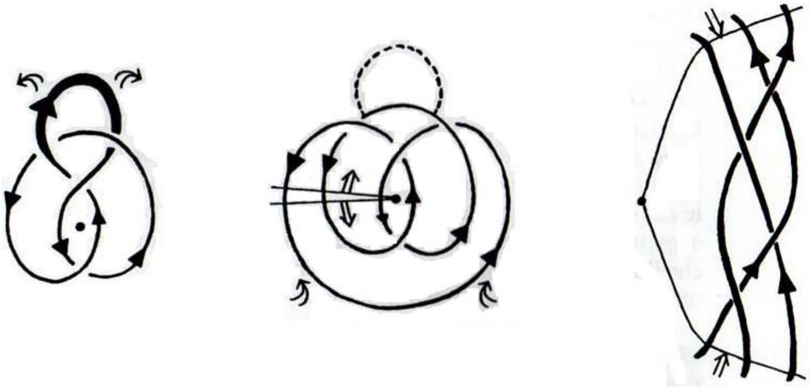




Chiusura di una treccia

Teorema di Alexander

- nodo non arrotolato



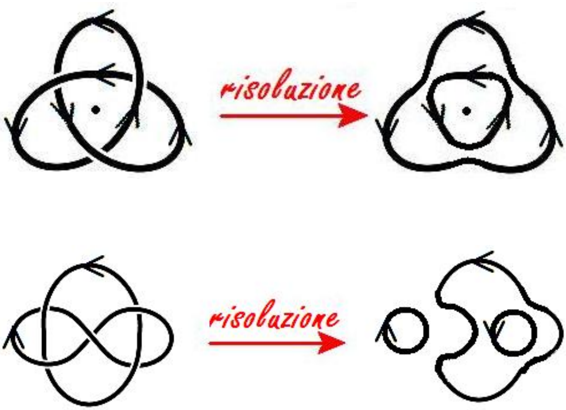
Algoritmo di Vogel

Risoluzione per cerchi di Seifert

Algoritmo di Vogel

Risoluzione per cerchi di Seifert

Esempi:



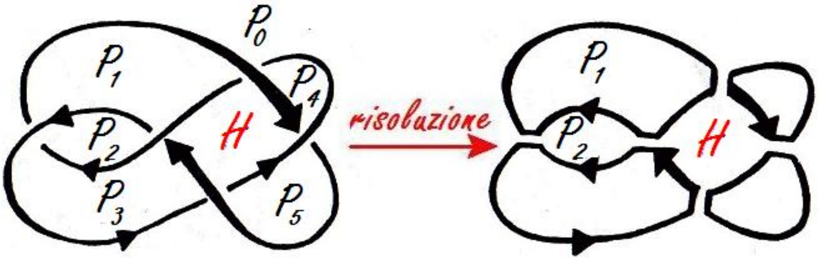
Algoritmo di Vogel

Creazione stato cuscinetto

Definizione

Data una proiezione di un link orientato diremo che una regione è *in conflitto* se, una volta applicata la risoluzione per cerchi di Seifert, i suoi confini appartengono a due diversi cerchi le cui frecce girano attorno alla regione nello stesso verso.

Esempio:



Algoritmo di Vogel

Creazione stato cuscinetto

Algoritmo di Vogel

Cambiamento d'infinito

Algoritmo di Vogel

L'algoritmo

Teorema

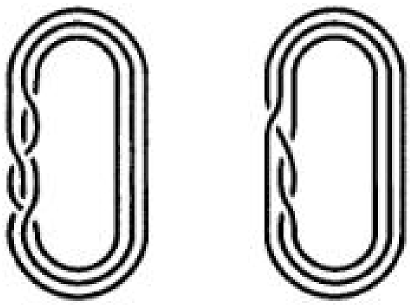
Ogni nodo può essere *arrotolato* applicando una serie di creazioni di stato cuscinetto, finché non vi sono più regioni in tumulto, e in seguito applicando una serie di cambiamenti di infinito, finché tutti i cerchi di Seifert sono incastonati. (Vogel, 1990)

Trecce chiuse

Trecce Markov-Equivalenti

Definizione

Due trecce si dicono *Markov-equivalenti* se le loro chiusure rappresentano lo stesso link.

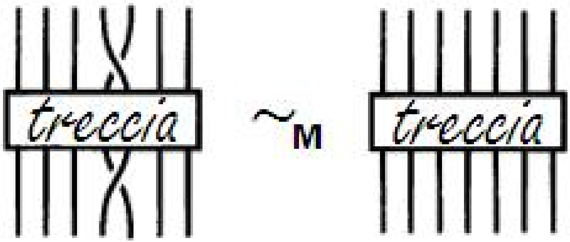


Trecce chiuse

Due nuove mosse

Proprietà

(iv) $\sigma_i^{-1}\,\omega\,\sigma_i = \omega = \sigma_i\,\omega\,\sigma_i^{-1}$ (coniugazione)

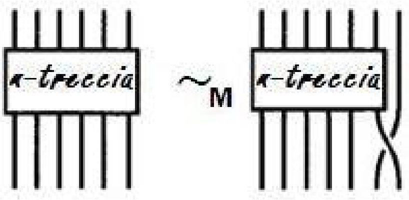


Trecce chiuse

Due nuove mosse

Proprietà

(v) $\omega\sigma_n = \omega = \omega\sigma_n^{-1}$ se ω è una $n-$stringa. (stabilizzazione)

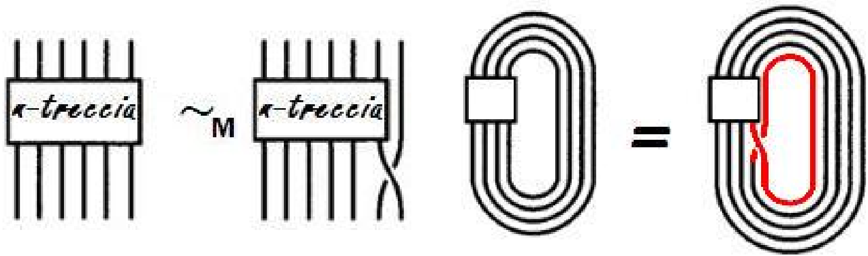


Trecce chiuse

Due nuove mosse

Proprietà

(v) $\omega\sigma_n = \omega = \omega\sigma_n^{-1}$ se ω è una $n-$stringa. (stabilizzazione)



Trecce chiuse

Teorema di Markov

Teorema

Due trecce sono *Markov-equivalenti* $\Leftrightarrow$ è possibile passare dall'una all'altra tramite una successione di mosse $(i) - (v)$. (Birman, 1976)

Trecce chiuse

Teorema di Markov

Teorema

Due trecce sono *Markov-equivalenti* $\Leftrightarrow$ è possibile passare dall'una all'altra tramite una successione di mosse $(i)-(v)$. (Birman, 1976)

Definizione

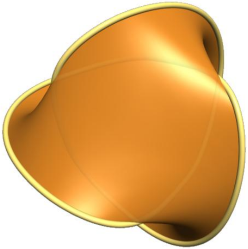
Il minimo numero di stringhe necessarie per rappresentare un link come chiusura di una treccia B è detto *indice di trecciatura* di B. Una treccia con numero di stringhe pari all'indice di trecciatura è detta *treccia minimale*.

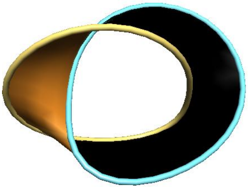
Superfici di Seifert

Definizione

Definizione

Una *superficie di Seifert* per un link L è una superficie orientata connessa e compatta con L come bordo.





Superfici di Seifert

Teorema di Seifert

Teorema

Ogni link orientato ammette una superficie di Seifert. (Seifert, 1932)

Superfici di Seifert

Teorema di Seifert

Teorema

Ogni link orientato ammette una superficie di Seifert. (Seifert, 1932)

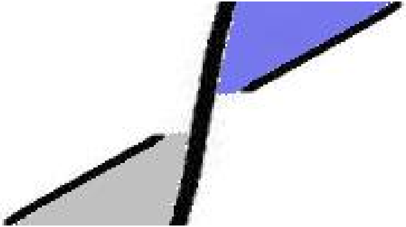
Dimostrazione (per un nodo K)

Dato un nodo K si applica la risoluzione per cerchi di Seifert.

Superfici di Seifert

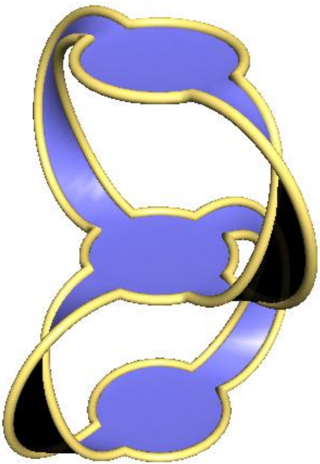
Teorema di Seifert

Si collegano i dischi l'un l'altro con delle strisce ruotate di mezzo giro.



Superfici di Seifert

Teorema di Seifert



Superfici di Seifert

Teorema di Seifert

Superfici di Seifert

Teorema di Seifert

Superfici di Seifert

Genere

Definizione

Si dice *genere* di un link L il più piccolo genere per ogni superficie di Seifert costruita a partire da una proiezione di L.

Superfici di Seifert

Genere

Definizione

Si dice *genere* di un link L il più piccolo genere per ogni superficie di Seifert costruita a partire da una proiezione di L.

Osservazione

L'algoritmo di Seifert applicato ai nodi alterni da una superficie minima.

In generale ciò non è vero. Anzi, esistono nodi tali che per ogni proiezione l'algoritmo restituisce una superficie non minimale. (Morton, 1986)

Superfici di Seifert

Proprietà

Teorema

$$g(J\#K) = g(J) + g(K)$$

Superfici di Seifert

Proprietà

Teorema

$g(J\#K) = g(J) + g(K)$

Corollario

$\bigcirc \neq K_1\#K_2 \qquad \text{con } K_1, K_2 \neq \bigcirc$

Gruppo di un nodo

Definizione

Definizione

Sia K un nodo in $\mathbb{R}^3$. Sia X il complementare di K, ovvero $X = \mathbb{R}^3 - K$. Si definisce *gruppo del nodo* $\pi(K)$ il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$, con $x_0 \in X$.

Gruppo di un nodo

Definizione

Definizione

Sia K un nodo in $\mathbb{R}^3$. Sia X il complementare di K, ovvero $X = \mathbb{R}^3 - K$. Si definisce *gruppo del nodo* $\pi(K)$ il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$, con $x_0 \in X$.

Teorema

- Nodi equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi.
- Due nodi con complementi omeomorfi sono equivalenti. (Gordon & Luecke, 1987)

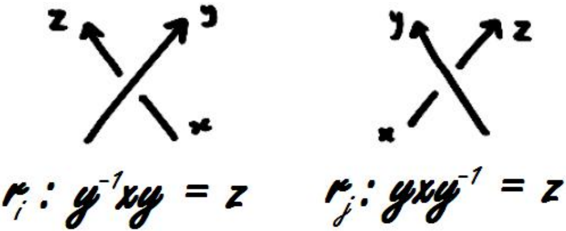
Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger

Teorema

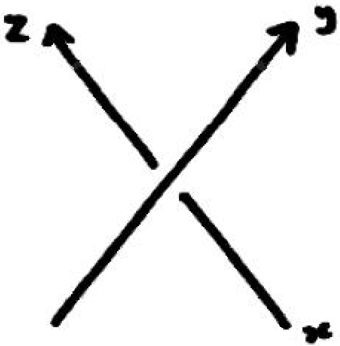
Sia D un diagramma piano di K. Indichiamo con $a_1, a_2, \cdots a_c$ gli archi di D e con r_1, r_2, r_c le relazioni tra gli archi definite come in figura.

$$\pi(K) \cong < a_1, a_2, \cdots a_c \ : \ r_1, r_2, \cdots r_c >$$



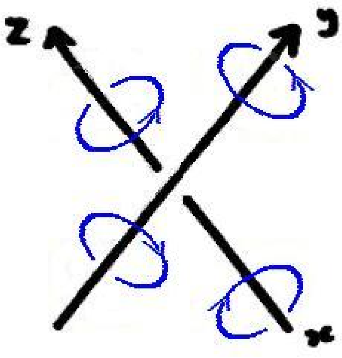
Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger



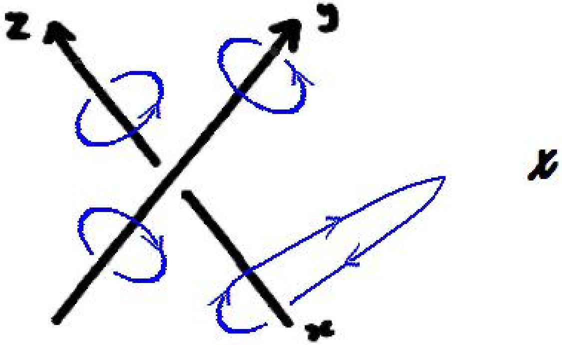
Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger



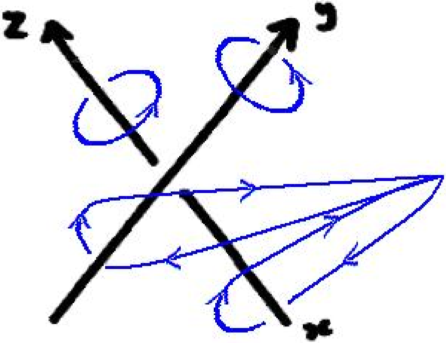
Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger



Gruppo di un nodo

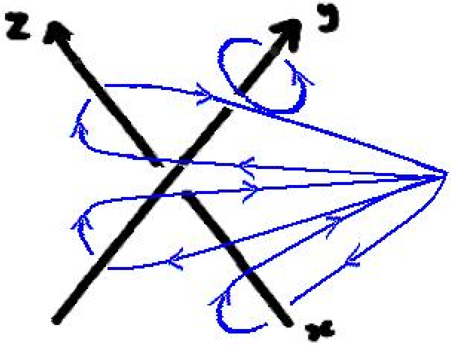
Presentazione di Wirtinger



xy

Gruppo di un nodo

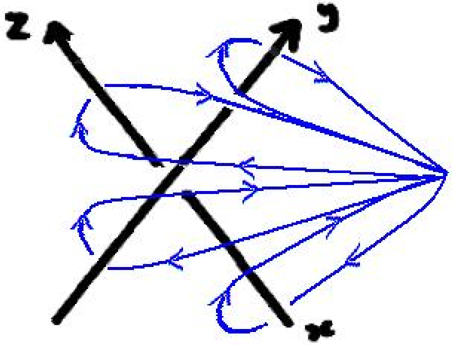
Presentazione di Wirtinger



$$xyz^{-1}$$

Gruppo di un nodo

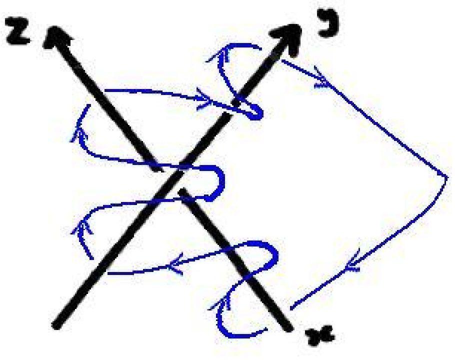
Presentazione di Wirtinger



$x\,y\,z^{-1}y^{-1}$

Gruppo di un nodo

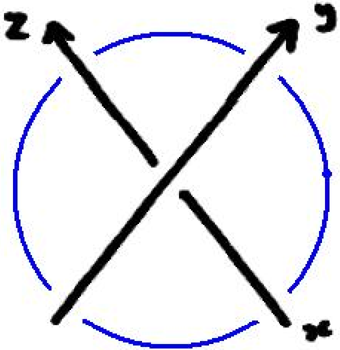
Presentazione di Wirtinger



$$x y z^{-1} y^{-1}$$

Gruppo di un nodo

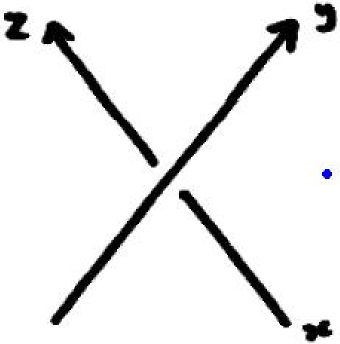
Presentazione di Wirtinger



$$x\,y\,z^{-1}\,y^{-1}$$

Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger



$$xyz^{-1}y^{-1} = \varepsilon$$

Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger

$$xyz^{-1}y^{-1} = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$xyz^{-1} = y$$

$$\Downarrow$$

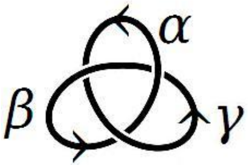
$$y^{-1}xyz^{-1} = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

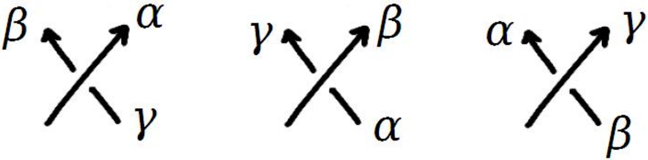
$$y^{-1}xy = z$$

Gruppo di un nodo

Esempio - Nodo trifoglio



Le tre relazioni sono:



$$\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta^{-1} \quad ; \quad \beta^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1} \quad ; \quad \gamma^{-1}\beta\gamma\alpha^{-1}$$

Gruppo di un nodo

Esempio - Nodo trifoglio

Osservazione

Partendo da due relazioni si ottiene la terza. Infatti supponendo

$$\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma \text{ e } \beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha$$

si ha:

$$\beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha = \alpha^{-1}\gamma(\gamma^{-1}\beta\gamma) = \alpha^{-1}\beta\gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$$

Gruppo di un nodo

Esempio - Nodo trifoglio

$$< \alpha, \beta, \gamma \ : \ \alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma, \ \beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha, \ \gamma = \beta^{-1}\alpha\beta > \cong$$

$$\cong < \alpha, \beta, \gamma \ : \ \alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma, \ \beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha > \cong$$

$$\cong < \beta, \gamma \ : \ \beta = (\gamma^{-1}\beta^{-1}\gamma)\gamma(\gamma^{-1}\beta\gamma) > \cong$$

$$\cong < \beta, \gamma \ : \ \beta\gamma\beta = \gamma\beta\gamma > \cong$$

$$\cong < a, b \ : \ a^2 = b^3 >$$

Domande?