Codes bifixes, combinatoire des mots et systémes dynamiques symboliques

Ensemble d'échanges d'intervalles sur un corps quadratique

Francesco Dolce

UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

RDMath IdF
Domaine d'Intérêt Majeur (DIM) en Mathématiques

îledeFrance

Journée de restitution 2014
Paris, 2 octobre 2014

Mots et morphismes

Un morphisme $f : A^* \to A^*$ est *primitive* s'il existe un $k > 0$ t.q. a appearaît dans $f^k(b)$ pour tout a, b.

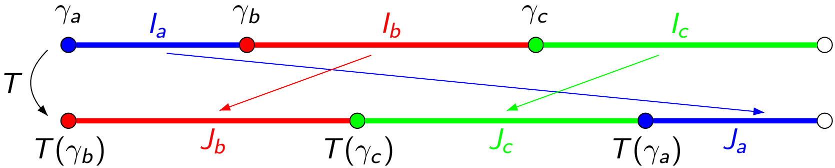
Un mot infin y est *morphique* si $y = \sigma(x)$ avec σ un morphisme et $x = f^\omega(a)$ un point fixe d'un morphisme f. Si $\sigma = id$. le mot est *purement morphique*. Si f est primitive, le mot est *morphique primitive*.

L'ensembe des facteurs $F(x)$ d'un mot infini x est dit (*purement*) *morphique* (*primitive*) si x est (purement) morphique (primitive).

Échanges d'intervalles

Soit $(I_a)_{a\in A}$ une partition ordonnée de $[\ell, r[$. Un *échange d'intervalles* est une fonction $T : [\ell, r[\to [\ell, r[$ défini par

$$T(z) = z + \alpha_z \quad \text{si } z \in I_a.$$



Échanges d'intervalles réguliers

T est dit être *minimale* si pour tout $z \in [\ell, r[$ l'orbite $\mathcal{O}(z) = \{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense in $[\ell, r[$.

T est dit *régulier* si les orbites des points de séparations $\neq \ell$ sont infinies et disjointes.

Théorème [Keane, 1975]

Un échange d'intervalle régulier est minimale.

Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativemant à $\{$a $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativemant à {a $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.

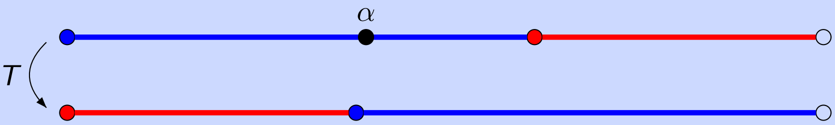
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{$a $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a$$

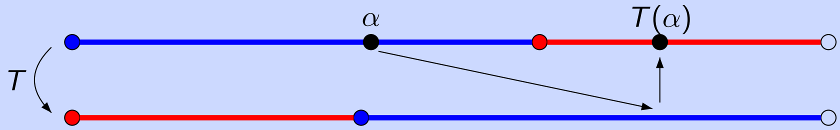
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{$a $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a\, b$$

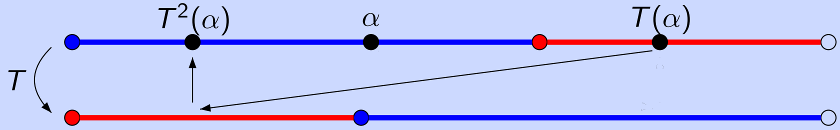
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{a$ $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a\,b\,a$$

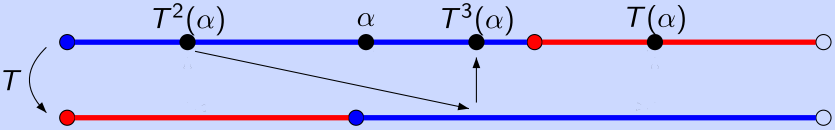
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{$a $(I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \quad T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a\, b\, a\, a$$

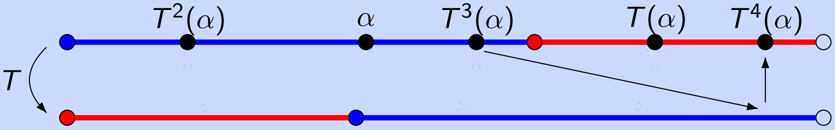
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{a\ (I_a)_{a\in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si } T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a\,b\,a\,a\,b$$

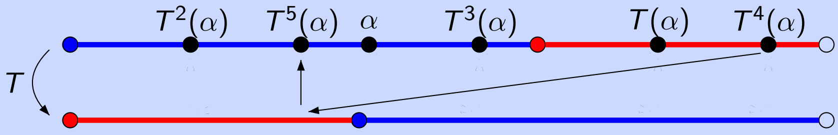
Codage naturel

Soit T un échange d'intervalles relativement à $\{$a $(I_a)_{a \in A}$. Le *codage naturel* de T par rapport à $z \in [\ell, r[$ est le mot infini $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in A^\omega$ défini par

$$a_n = a \quad \text{si} \ T^n(z) \in I_a.$$

Exemple

Lee *mot de Fibonacci* est le codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3-\sqrt{5})/2$ par rapport au point α, c-à-d $T(z) = z + \alpha \bmod 1$.



$$\Sigma_T(\alpha) = a\,b\,a\,a\,b\,a \cdots$$

Ensemble d'échanges d'intervalles réguliers

Proposition

Si T est minimale, $F\big(\Sigma_T(z)\big)$ ne dépende pas de z.

Quand T est régulier (minimale), $F(T) = F\big(\Sigma_T(z)\big)$ est dit un *ensemble d'échange d'intervalle régulier* (*minimale*).

Ensemble d'échanges d'intervalles réguliers

Proposition

Si T est minimale, $F(\Sigma_T(z))$ ne dépende pas de z.

Quand T est régulier (minimale), $F(T) = F(\Sigma_T(z))$ est dit un *ensemble d'échange d'intervalle régulier* (*minimale*).

Exemple

L'*ensemble de Fibonacci* est l'ensemble des facteurs d'un codage naturel de la rotation d'angle $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$.

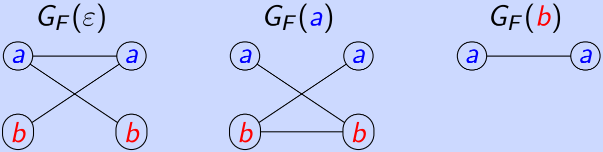
$$F(T) = \left\{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, aab, aba, baa, \dots\right\}$$

Condition de l'arbre

Théorème

Un ensemble d'échange d'intervalles régulier F satisfait la *condition de l'arbre*, c-à-d pour tout mot $w \in F$ le *graphe d'extension* $G_F(w)$ est acyclique et connexe.

Example



$$F(T) = \left\{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, aab, aba, baa, \dots \right\}$$

Proprieté de la base d'indice fini

Théorème

Un ensemble d'échange d'intervalles régulier F satisfait la *propriete de la base d'indice fini*, c-à-d tout code bifixe $X \subset F$ est F-maximal bifixe de F-degré $d \iff X$ est une base d'un sous-groupe d'indice d du groupe libre.

Example

Soit F l'ensemble de Fibonacci. Pour tout n, $F \cap A^n$ est une base de $\langle A^n \rangle$.

- Pour $n = 2$ on a $F \cap A^2 = \{aa, ab, ba\}$ et $bb = ba\,(aa)^{-1}\,ab$.
- Pour $n = 3$ on a $F \cap A^3 = \{aab, aba, baa, bab\}$ et

$$
\begin{aligned}
aaa &= aab\,(bab)^{-1}\,baa \\
abb &= aba\,(baa)^{-1}\,bab \\
bba &= bab\,(aab)^{-1}\,aba \\
bbb &= bba\,(aba)^{-1}\,aab
\end{aligned}
$$

Ensemble d'échanges d'intervalles réguliers sur un corps quadratique

Théorème

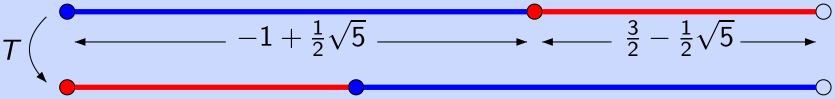
Soit T un échange d'intervalles régulier défini sur un corps quadratique. L'ensemble associé $F(T)$ est morphique primitive.

Ensemble d'échanges d'intervalles réguliers sur un corps quadratique

Théorème

Soit T un échange d'intervalles régulier défini sur un corps quadratique. L'ensemble associé $F(T)$ est morphique primitive.

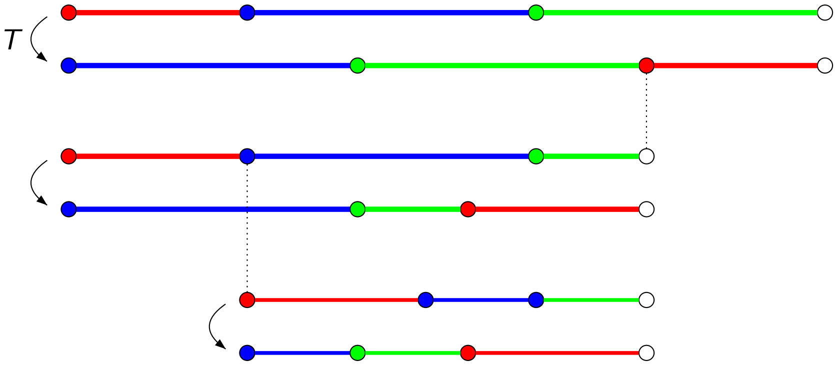
Example



$$F(T) = F(x) \qquad \text{avec } x = id. \circ f^{\omega}(a)$$

$$f : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

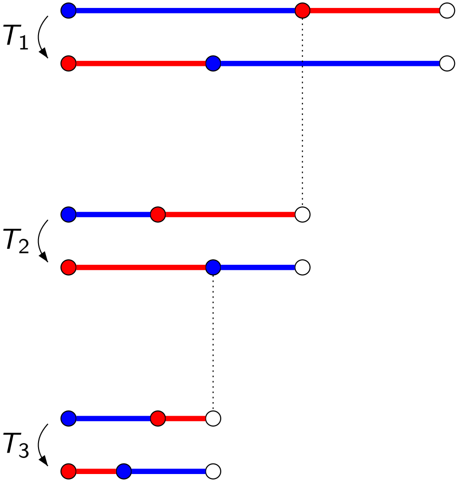
Induction de Rauzy bilatére



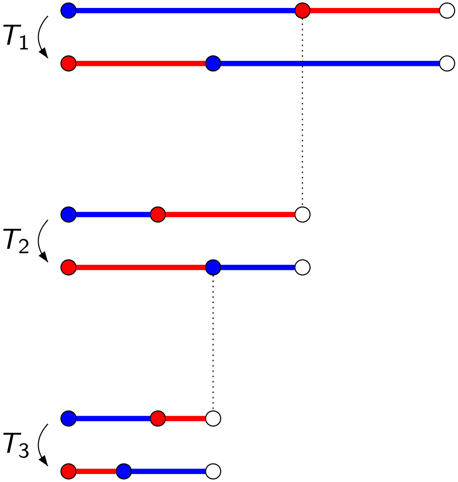
Théorème

T échange d'intervalles régulier $\Longrightarrow$ transformations induites sont aussi des échanges d'intervalles réguliers.

Induction de Rauzy bilatére



Induction de Rauzy bilatére



$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \phi = 1.61803\ldots$$

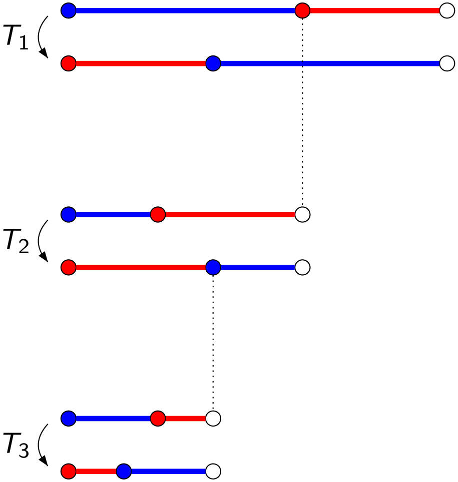
$$= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}$$

$$= [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \frac{1}{\phi}$$

$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \phi$$

Induction de Rauzy bilatére



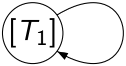
$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \phi = 1.61803\ldots$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}$$

$$= [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \frac{1}{\phi}$$

$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \phi$$



Induction de Rauzy sur un corps quadratique

Théorème (Lagrange, 1770)

Un irrationnel est quadratique si (et seulement si) son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

Induction de Rauzy sur un corps quadratique

Théorème (Lagrange, 1770)

Un irrationnel est quadratique si (et seulement si) son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

Théorème (Boshernitzan et Carrol, 1997)

Si on part d'un échange d'intervalles régulier et on induit sur des sous-intervalles « particuliers », on obtient un nombre fini de classes d'équivalances distinctes.

Induction de Rauzy sur un corps quadratique

Théorème (Lagrange, 1770)

Un irrationnel est quadratique si (et seulement si) son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

Théorème (Boshernitzan et Carrol, 1997)

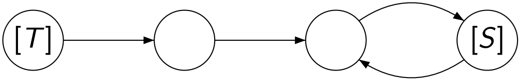
Si on part d'un échange d'intervalles régulier et on induit sur des sous-intervalles « particuliers », on obtient un nombre fini de classes d'équivalances distinctes.

Theorem (D., 2014)

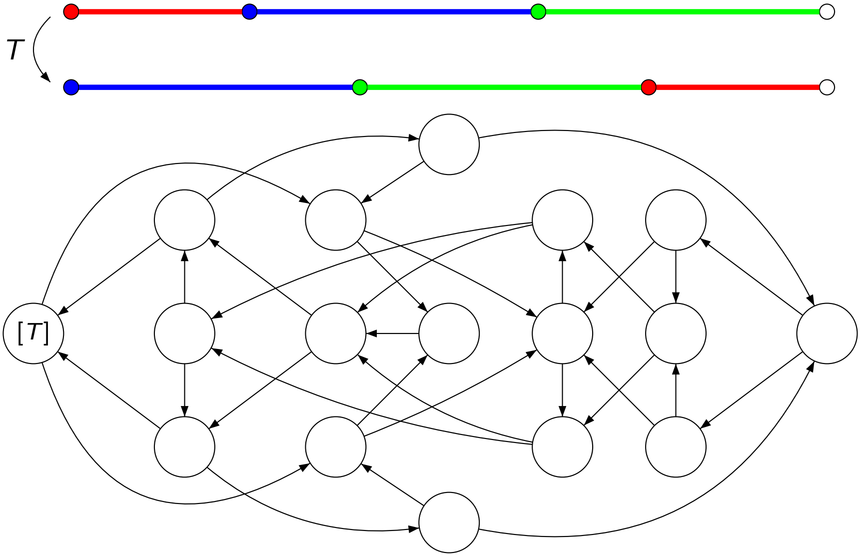
Si on part d'un échange d'intervalles régulier et on induit bilatéremente, on obtient un nombre fini de classes déquivalances distinctes.

Induction de Rauzy sur un corps quadratique

$$\frac{|I_a|}{|I_b|} = \frac{4+\sqrt{2}}{2} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}} = [2; 1, 2, 2, 2, \cdots]$$



Induction de Rauzy sur un corps quadratique



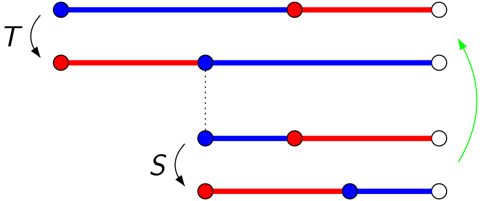
Induction de Rauzy sur un corps quadratique

Corollaire

Soit T un échange d'intervalles régulier defini sur un corps quadratique. On peut trouver dans le graphe d'induction un chemin de $[T]$ à un sommet $[S]$ suivi par par un cycle.

$$\begin{tikzcd} {[T]} \arrow[r, "\cdots"] & {[S]} \arrow[loop right] & \cdots \end{tikzcd}$$

Induction de Rauzy et codage naturel

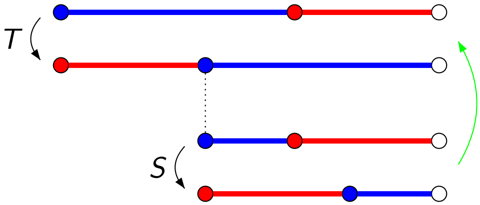


$$\theta = \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \end{cases}$$

$$\Sigma_T(\alpha) = a\ \underline{b\ a}\ a\ \underline{b\ a}\ \underline{b\ a}\ a\ \underline{b\ a}\ a\ \underline{b\ a}\ \underline{b\ a} \cdots$$

$$\Sigma_S(\alpha) = a\ b\ a\ b\ b\ a\ b\ a\ b\ b \cdots$$

Induction de Rauzy et codage naturel



$$\theta = \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \end{cases}$$

$$\Sigma_T(\alpha) = a\,\underline{b\,a}\,a\,\underline{b\,a}\,\underline{b\,a}\,a\,\underline{b\,a}\,a\,\underline{b\,a}\,\underline{b\,a}\cdots$$

$$\Sigma_S(\alpha) = a\,b\,a\,b\,b\,a\,b\,a\,b\,b\cdots$$

Théorème

Soit T un échange d'intervalles régulier et S un échange d'intervalles obtenu par induction de Rauzy. Il existe un automorphisme θ du groupe libre A° t.q. $\Sigma_T(z) = \theta\left(\Sigma_S(z)\right)$ pour tout $z \in D(S)$.

Ensembles d'échange d'intervalles réguliers sur un corps quadratique

Théorème

Soit T un échange d'intervalles régulier défini sur un corps quadratique. L'ensemble associé $F(T)$ est morphique [primitive].

Proof.

$$\begin{tikzcd} {[T]} \arrow[rr, "\theta"] & & {[S]} \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

Il existe un point $z \in D(S)$ et deux automorphismes θ, η du groupe libre t.q.

$$\Sigma_T(z) = \theta(\Sigma_S(z))$$

avec $\Sigma_S(z)$ point fixe de η.

Questions