Dendric languages and return words

Francesco Dolce

Konference *TIGR CoW 2021*

Telč, 27. června 2021

Dendrické jazyky a návratová slova

František Sladký

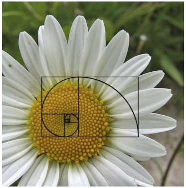
Konference *TIGR CoW 2021*

Telč, 27. června 2021

Fibonacci

$$\mathbf{x} = \color{red}{a}\color{blue}{b}\color{red}{aa}\color{blue}{b}\color{red}{a}\color{blue}{b}\color{red}{aa}\color{blue}{b}\color{red}{aa}\color{blue}{b}\color{red}{a}\color{blue}{b}\color{red}{a}\cdots$$

$$\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(\color{red}{a}) \qquad \text{kde} \qquad \varphi : \begin{cases} \color{red}{a} \mapsto \color{red}{a}\color{blue}{b} \\ \color{blue}{b} \mapsto \color{red}{a} \end{cases}$$



Fibonacci

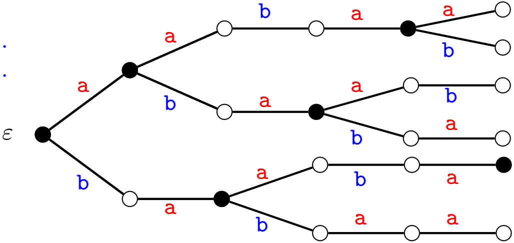
$$\mathbf{x} = \text{abaababaabaababa}\cdots$$

Jazyk Fibonacciho slova (množina faktorů $\mathbf{x}$) je Sturmovský jazyk.

Definice

Sturmovský jazyk $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$ je faktorová množina tak, že $\mathcal{C}(n) = \text{Card}\,(\mathcal{L} \cap \mathcal{A}^n) = n + 1$.

n :	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\mathcal{C}(n)$:	1	2	3	4	5	6	$\cdots$



2-kódovaný Fibonacci

$$\mathsf{x} = \mathtt{ab\ aa\ ba\ ba\ ab\ aa\ ba\ ba}\ \cdots$$

2-kódovaný Fibonacci

$$\mathsf{x} = \texttt{ab}\ \texttt{aa}\ \texttt{ba}\ \texttt{ba}\ \texttt{ab}\ \texttt{aa}\ \texttt{ba}\ \texttt{ba}\ \cdots$$

$$f : \begin{cases} \texttt{u} & \mapsto & \texttt{aa} \\ \texttt{v} & \mapsto & \texttt{ab} \\ \texttt{w} & \mapsto & \texttt{ba} \end{cases}$$

2-kódovaný Fibonacci

$$\mathsf{x} = \mathtt{ab}\ \mathtt{aa}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ab}\ \mathtt{aa}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ba}\ \cdots$$

$$f^{-1}(\mathsf{x}) = \mathtt{v}\ \mathtt{u}\ \mathtt{w}\ \mathtt{w}\ \mathtt{v}\ \mathtt{u}\ \mathtt{w}\ \mathtt{w}\ \cdots$$

$$f : \begin{cases} \mathtt{u} & \mapsto & \mathtt{aa} \\ \mathtt{v} & \mapsto & \mathtt{ab} \\ \mathtt{w} & \mapsto & \mathtt{ba} \end{cases}$$

2-kódovaný Fibonacci

$$\mathsf{x} = \mathtt{ab}\ \mathtt{aa}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ab}\ \mathtt{aa}\ \mathtt{ba}\ \mathtt{ba}\ \cdots$$

$$f^{-1}(\mathsf{x}) = \mathtt{v}\ \mathtt{u}\ \mathtt{w}\ \mathtt{w}\ \mathtt{v}\ \mathtt{u}\ \mathtt{w}\ \mathtt{w}\ \cdots$$

$$f : \begin{cases} \mathtt{u} & \mapsto & \mathtt{aa} \\ \mathtt{v} & \mapsto & \mathtt{ab} \\ \mathtt{w} & \mapsto & \mathtt{ba} \end{cases}$$

Arnouxho-Rauzyho jazyky

Definice

Arnouxho-Rauzyho jazyk je faktorová množina taková, že je uzavřená na reverzi, $\mathcal{C}(n) = (\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) - 1)n + 1$ a pro každou délku má právě jeden pravý speciální faktor.

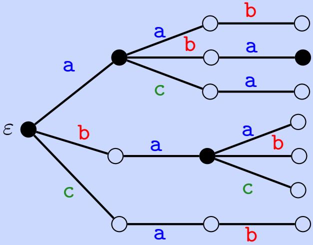
Arnouxho-Rauzyho jazyky

Definice

Arnouxho-Rauzyho jazyk je faktorová množina taková, že je uzavřená na reverzi, $\mathcal{C}(n) = (\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) - 1)n + 1$ a pro každou délku má právě jeden pravý speciální faktor.

Příklad (Tribonacci)

Faktory pevného bodu $\psi^{\omega}(\mathtt{a})$ morfismu $\psi : \mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab}, \quad \mathtt{b} \mapsto \mathtt{bc}, \quad \mathtt{c} \mapsto \mathtt{a}.$



n :	0	1	2	3	$\cdots$
$\mathcal{C}(n)$:	1	3	5	7	$\cdots$

$$\mathcal{C}(n) = 2n + 1$$

2-kódovaný Fibonacci

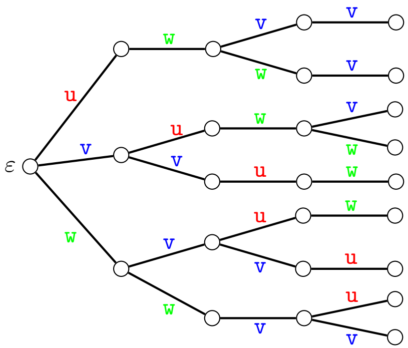
$$f^{-1}(\mathsf{x}) = \texttt{v}\ \texttt{u}\ \texttt{w}\ \texttt{w}\ \texttt{v}\ \texttt{u}\ \texttt{w}\ \texttt{w}\ \cdots$$

Je množina faktorů $f^{-1}(\mathsf{x})$ Arnouxho-Rauzyho jazyk?

2-kódovaný Fibonacci

$$f^{-1}(\mathsf{x}) = \mathtt{v\ u\ w\ w\ v\ u\ w\ w} \cdots$$

Je množina faktorů $f^{-1}(\mathsf{x})$ Arnouxho-Rauzyho jazyk?



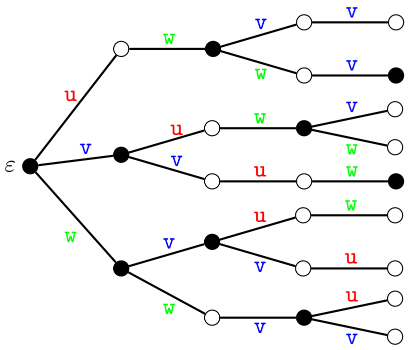
$$\mathcal{C}(n) = 2n + 1$$

n :	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathcal{C}(n)$:	1	3	5	7	9	$\cdots$

2-kódovaný Fibonacci

$$f^{-1}(\mathsf{x}) = \mathtt{v\ u\ w\ w\ v\ u\ w\ w}\ \cdots$$

Je množina faktorů $f^{-1}(\mathsf{x})$ Arnouxho-Rauzyho jazyk? Ne!



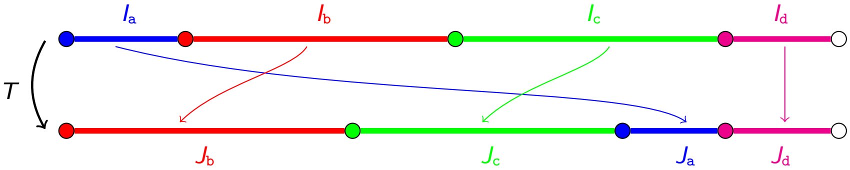
$$\mathcal{C}(n) = 2n + 1$$

n :	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathcal{C}(n)$:	1	3	5	7	9	$\cdots$

Výměna intervalů

Nechť $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ a $(J_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ jsou dvě dělení intervalu $[0, 1[$.
Transformace výměny intervalů je zobrazení $T : [0, 1[\to [0, 1[$

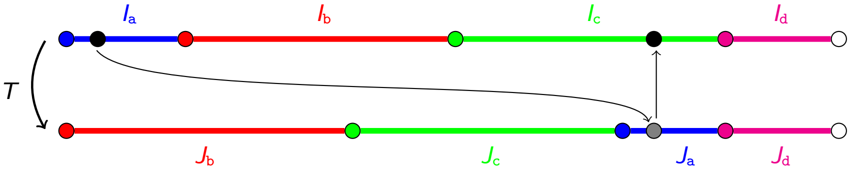
$$T(z) = z + y_\alpha \quad \text{if } z \in I_\alpha .$$



Výměna intervalů

Nechť $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ a $(J_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ jsou dvě dělení intervalu $[0,1[$.
Transformace výměny intervalů je zobrazení $T : [0,1[\to [0,1[$

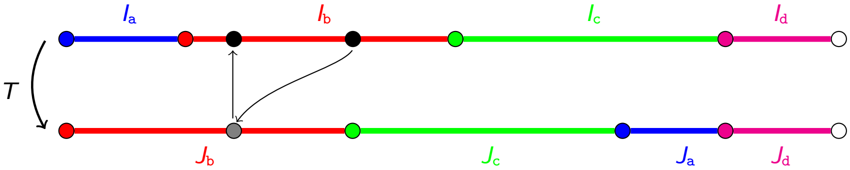
$$T(z) = z + y_\alpha \quad \text{if } z \in I_\alpha.$$



Výměna intervalů

Nechť $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ a $(J_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ jsou dvě dělení intervalu $[0,1[$.
Transformace výměny intervalů je zobrazení $T : [0,1[\to [0,1[$

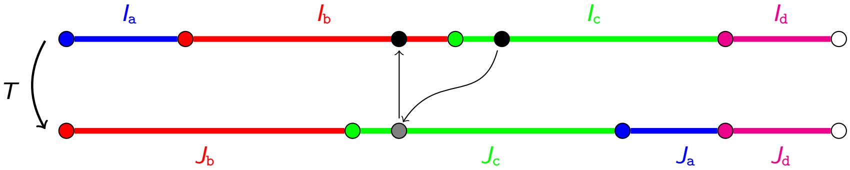
$$T(z) = z + y_\alpha \quad \text{if } z \in I_\alpha.$$



Výměna intervalů

Nechť $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ a $(J_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ jsou dvě dělení intervalu $[0,1[$.
Transformace výměny intervalů je zobrazení $T : [0,1[\to [0,1[$

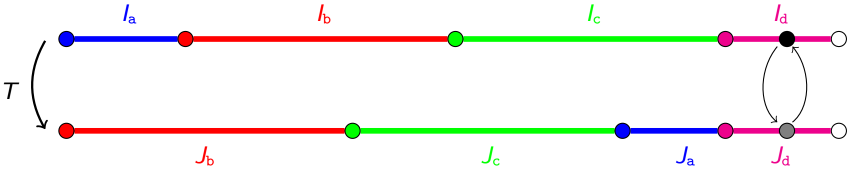
$$T(z) = z + y_\alpha \quad \text{if } z \in I_\alpha.$$



Výměna intervalů

Nechť $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ a $(J_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ jsou dvě dělení intervalu $[0,1[$.
Transformace výměny intervalů je zobrazení $T : [0,1[\to [0,1[$

$$T(z) = z + y_\alpha \quad \text{if } z \in I_\alpha.$$



Výměna intervalů

T je *minimální* pokud pro jakýkoli bod $z \in [0,1[$ je orbita $\mathcal{O}(z) = \{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ hustá množina v $[0,1[$.

T je *regulární*, pokud jsou orbity nenulových *separačních bodů* nekonečné a disjunktní.

Věta [Keane (1975)]

Regulární transformace výměny intervalů je minimální.

Výměna intervalů

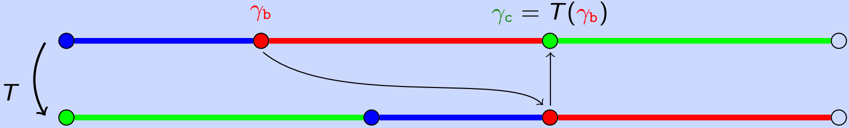
T je *minimální* pokud pro jakýkoli bod $z \in [0,1[$ je orbita $\mathcal{O}(z) = \{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ hustá množina v $[0,1[$.

T je *regulární*, pokud jsou orbity nenulových *separačních bodů* nekonečné a disjunktní.

Věta [Keane (1975)]

Regulární transformace výměny intervalů je minimální.

Příklad (obráceně neplatí)

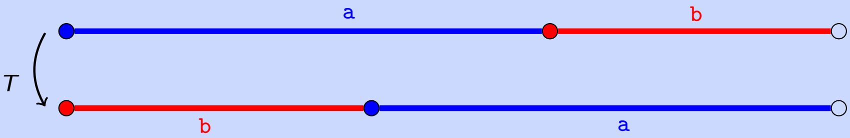


Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)

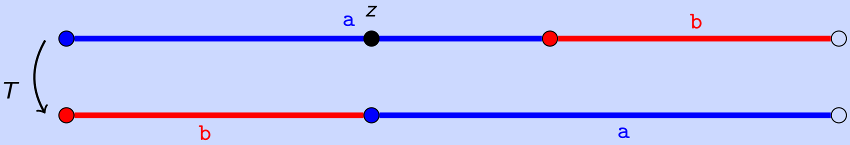


Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



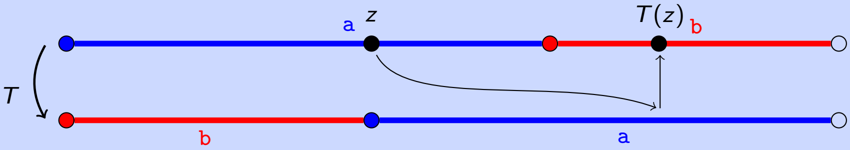
$$\Sigma_T(z) = a$$

Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



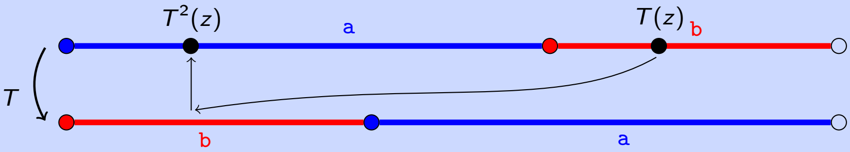
$$\Sigma_T(z) = \text{ab}$$

Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha.$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



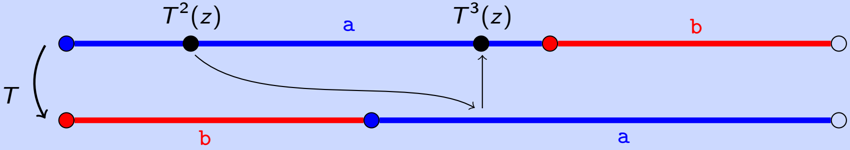
$$\Sigma_T(z) = \mathtt{aba}$$

Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



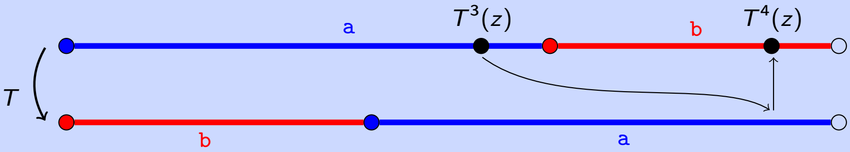
$$\Sigma_T(z) = \mathtt{abaa}$$

Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



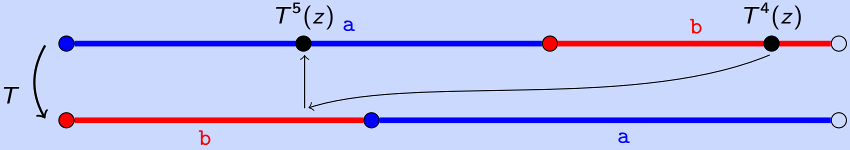
$$\Sigma_T(z) = \texttt{abaab}$$

Výměna intervalů

Přirozené kódování T vzhledem k $z \in [0,1[$ je nekonečné slovo $\Sigma_T(z) = a_0 a_1 \cdots \in \mathcal{A}^\omega$ takové, že

$$a_n = \alpha \quad \text{if } T^n(z) \in I_\alpha .$$

Příklad (Fibonacci, $z = (3-\sqrt{5})/2$)



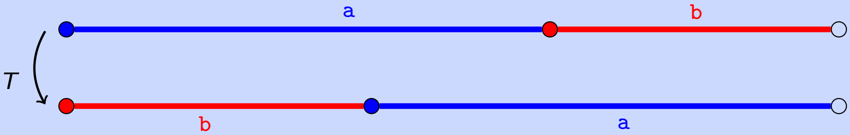
$$\Sigma_T(z) = \mathtt{abaaba}\cdots$$

Výměna intervalů

Jazyk $\mathcal{L}(T) = \bigcup_{z \in [0,1[} \mathrm{Fac}\,(\Sigma_T(z))$ je *jazyk pro* (*minimální*, *regulární*) *výměnu intervalů*.

Poznámka. Pokud T je minimální, $\mathrm{Fac}\,(\Sigma_T(z))$ nezávisí na bodě z.

Příklad (Fibonacci)



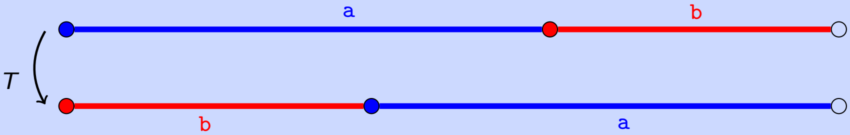
$$\mathcal{L}(T) = \{\varepsilon,\ \mathtt{a}, \mathtt{b},\ \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba},\ \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}\ \ldots\}$$

Výměna intervalů

Jazyk $\mathcal{L}(T) = \bigcup_{z \in [0,1[} \mathrm{Fac}\,(\Sigma_T(z))$ je*jazyk pro* (*minimální*, *regulární*) *výměnu intervalů*.

Poznámka. Pokud T je minimální, $\mathrm{Fac}\,(\Sigma_T(z))$ nezávisí na bodě z.

Příklad (Fibonacci)

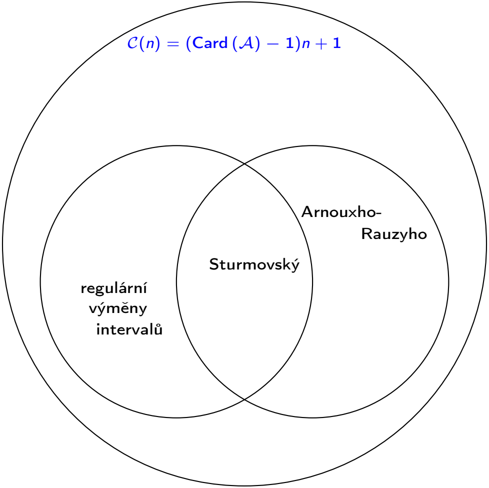


$$\mathcal{L}(T) = \left\{\varepsilon,\ \mathtt{a}, \mathtt{b},\ \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba},\ \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}\ \ldots\right\}$$

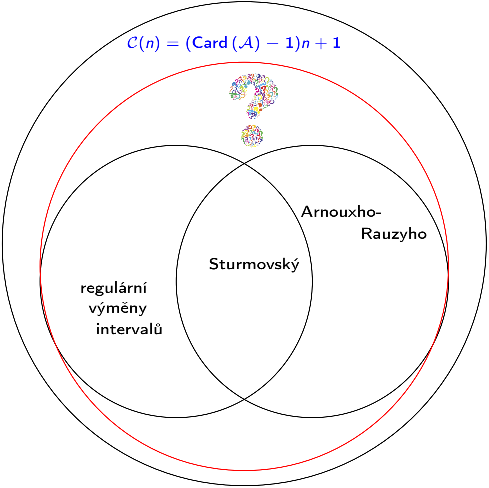
Tvrzení

Jazyky pro regulární výměnu intervalů mají $\mathcal{C}(n) = (\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) - 1)n + 1$.

Arnouxho-Rauzyho a Výměna intervalů



Arnouxho-Rauzyho a Výměna intervalů



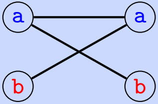
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

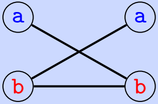
$$\begin{aligned} L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) &= \{(u,v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$



$\mathcal{E}(\mathtt{a})$



$\mathcal{E}(\mathtt{b})$

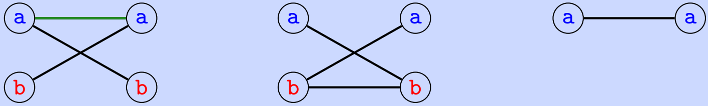
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

$$\begin{array}{rcl} L(w) & = & \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) & = & \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) & = & \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{array}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$ $\mathcal{E}(\mathtt{a})$ $\mathcal{E}(\mathtt{b})$



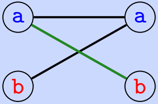
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

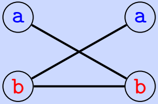
$$
\begin{aligned}
L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\
R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\
B(w) &= \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\}
\end{aligned}
$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$



$\mathcal{E}(\mathtt{a})$



$\mathcal{E}(\mathtt{b})$

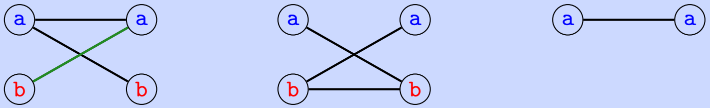
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

$$\begin{aligned} L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) &= \{(u,v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$ $\mathcal{E}(\mathtt{a})$ $\mathcal{E}(\mathtt{b})$



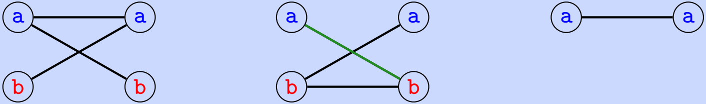
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

$$\begin{aligned} L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) &= \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$ $\mathcal{E}(\mathrm{a})$ $\mathcal{E}(\mathrm{b})$

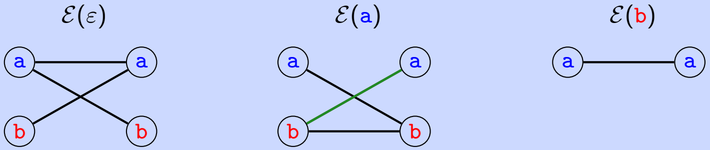


Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

$$\begin{aligned} L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) &= \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \text{a}, \text{b}, \text{aa}, \text{ab}, \text{ba}, \text{aab}, \text{aba}, \text{baa}, \text{bab}, \ldots\}$)



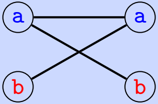
Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

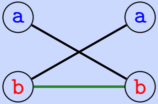
$$
\begin{aligned}
L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\
R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\
B(w) &= \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\}
\end{aligned}
$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \text{a}, \text{b}, \text{aa}, \text{ab}, \text{ba}, \text{aab}, \text{aba}, \text{baa}, \text{bab}, \dots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$



$\mathcal{E}(\text{a})$



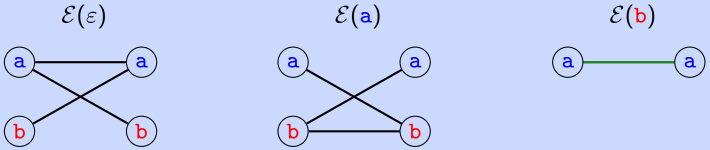
$\mathcal{E}(\text{b})$

Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

$$\begin{array}{rcl} L(w) & = & \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\ R(w) & = & \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\ B(w) & = & \{(u,v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\} \end{array}$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)



Rozšiřující grafy

Rozšiřující graf slova $w \in \mathcal{L}$ je neorientovaný bipartitní graf $\mathcal{E}(w)$ s vrcholy $L(w) \sqcup R(w)$ a hranami $B(w)$, kde

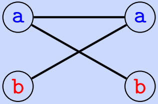
$$
\begin{aligned}
L(w) &= \{u \in \mathcal{A} \mid uw \in \mathcal{L}\} \\
R(w) &= \{v \in \mathcal{A} \mid wv \in \mathcal{L}\} \\
B(w) &= \{(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid uwv \in \mathcal{L}\}
\end{aligned}
$$

Multiplicita slova w je počet

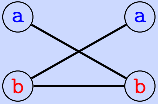
$$m(w) = \mathrm{Card}\,(B(w)) - \mathrm{Card}\,(L(w)) - \mathrm{Card}\,(R(w)) + 1.$$

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)

$\mathcal{E}(\varepsilon)$



$\mathcal{E}(\mathrm{a})$



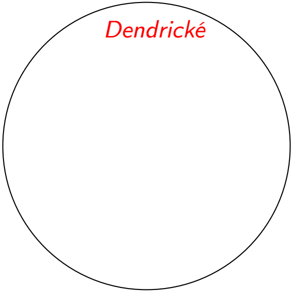
$\mathcal{E}(\mathrm{b})$

$m(\mathrm{a}) = 3 - 2 - 2 + 1 = 0$

Dendrické a neutrální jazyky

Definice

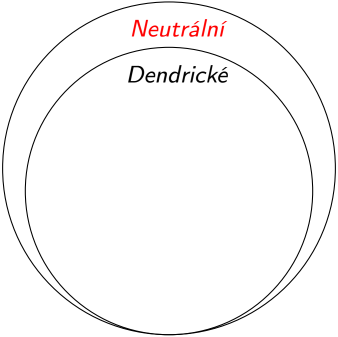
Jazyk $\mathcal{L}$ je *dendrický* pokud je graf $\mathcal{E}(w)$ stromem pro libovolné $w \in \mathcal{L}$.



Dendrické a neutrální jazyky

Definice

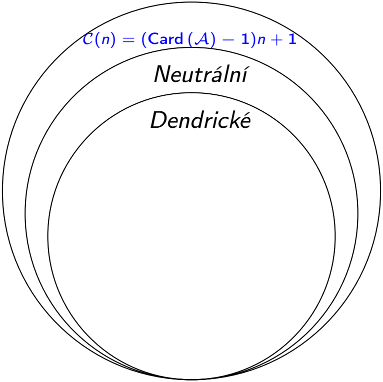
Jazyk $\mathcal{L}$ je *dendrický* pokud je graf $\mathcal{E}(w)$ stromem pro libovolné $w \in \mathcal{L}$.
Jazyk $\mathcal{L}$ je *neutrální* pokud má každé slovo w multiplicitu $m(w) = 0$.



Dendrické a neutrální jazyky

Definice

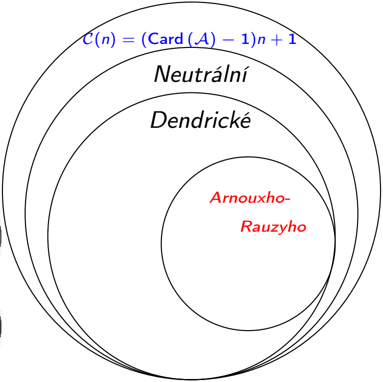
Jazyk $\mathcal{L}$ je *dendrický* pokud je graf $\mathcal{E}(w)$ stromem pro libovolné $w \in \mathcal{L}$.
Jazyk $\mathcal{L}$ je *neutrální* pokud má každé slovo w multiplicitu $m(w) = 0$.



Dendrické a neutrální jazyky

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *dendrický* pokud je graf $\mathcal{E}(w)$ stromem pro libovolné $w \in \mathcal{L}$.
Jazyk $\mathcal{L}$ je *neutrální* pokud má každé slovo w multiplicitu $m(w) = 0$.

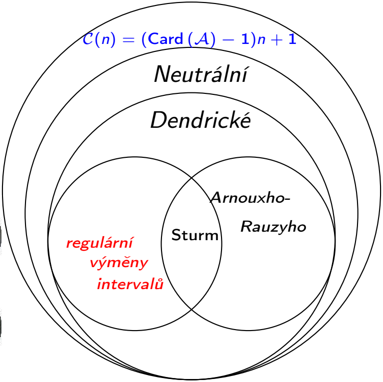


[Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone: "**Acyclic, connected and tree sets**" (2014).]

Dendrické a neutrální jazyky

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *dendrický* pokud je graf $\mathcal{E}(w)$ stromem pro libovolné $w \in \mathcal{L}$.
Jazyk $\mathcal{L}$ je *neutrální* pokud má každé slovo w multiplicitu $m(w) = 0$.



[Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone: "Bifix codes and interval exchanges" (2015).]

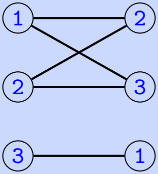
Dendrické a neutrální jazyky

Příklad (neutrální, ale ne dendrický)

Jazyk pevného bodu $\tau(\sigma^\omega(\mathtt{a}))$ je (rekurentní) neutrální jazyk, ale není dendrický (ani acyklický).

$$\sigma : \begin{cases} \mathtt{a} \mapsto \mathtt{ab} \\ \mathtt{b} \mapsto \mathtt{cda} \\ \mathtt{c} \mapsto \mathtt{cd} \\ \mathtt{d} \mapsto \mathtt{abc} \end{cases} \qquad \tau : \begin{cases} \mathtt{a} \mapsto \mathtt{12} \\ \mathtt{b} \mapsto \mathtt{2} \\ \mathtt{c} \mapsto \mathtt{3} \\ \mathtt{d} \mapsto \mathtt{3} \end{cases}$$

$\mathcal{E}(\varepsilon)$

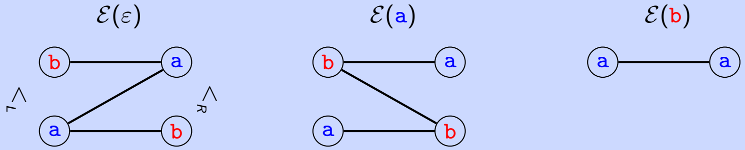


Planární dendrické jazyky

Nechť $<_L$ a $<_R$ jsou dvš uspořádání na $\mathcal{A}$.
Pro jazyk $\mathcal{L}$ a slovo $w \in \mathcal{L}$ je graf $\mathcal{E}(w)$ *kompatibilní* vzhledem k $<_L$ a $<_R$ pokud pro všechny $(a, b), (c, d) \in B(w)$, máme

$$a <_L c \quad \Longrightarrow \quad b \leq_R d.$$

Příklad (Fibonacci, $\mathtt{b} <_L \mathtt{a}$ a $\mathtt{a} <_R \mathtt{b}$)

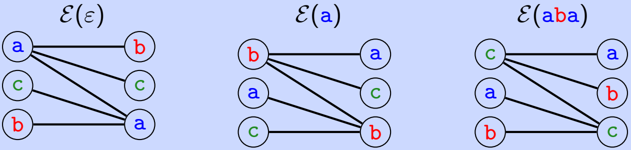


Bi-rozšiřitelný jazyk $\mathcal{L}$ je *planární dendrický jazyk* vzhledem k $<_L$ a $<_R$ na $\mathcal{A}$ pokud pro libovolné $w \in \mathcal{L}$, je $\mathcal{E}(w)$ strom kompatibilní vzhledem k $<_L$ a $<_R$.

Planární dendrické jazyky

Příklad

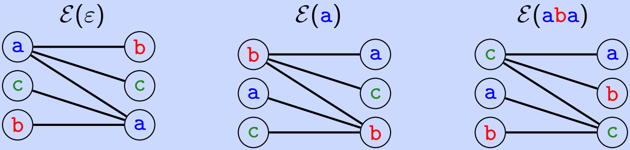
Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.



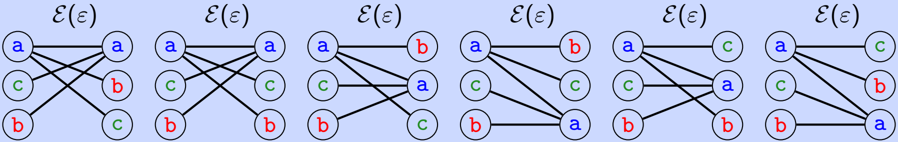
Planární dendrické jazyky

Příklad

Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.



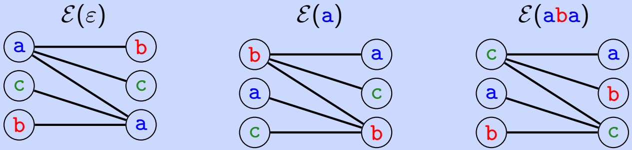
- <u>$\mathrm{a} <_L \mathrm{c} <_L \mathrm{b}$</u>



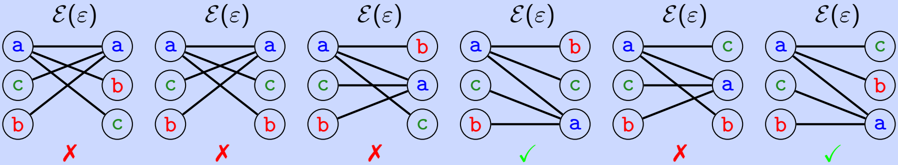
Planární dendrické jazyky

Příklad

Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.



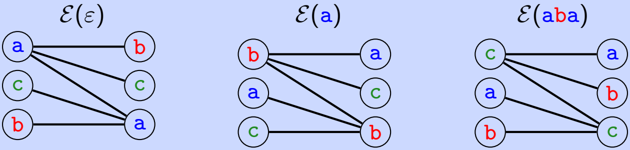
- <u>$a <_L c <_L b$</u> $\Longrightarrow$ $b <_R c <_R a$ or $c <_R b <_R a$



Planární dendrické jazyky

Příklad

Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.

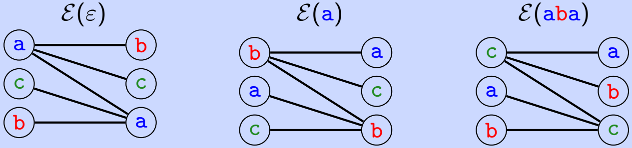


- <u>$\mathrm{a} <_L \mathrm{c} <_L \mathrm{b}$</u> $\implies$ $\mathrm{b} <_R \mathrm{c} <_R \mathrm{a}$ or $\mathrm{c} <_R \mathrm{b} <_R \mathrm{a}$

Planární dendrické jazyky

Příklad

Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.



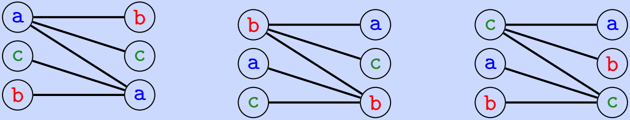
- <u>$a <_L c <_L b$</u> $\Longrightarrow$ $b <_R c <_R a$

Planární dendrické jazyky

Příklad

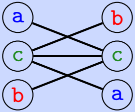
Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.

$\mathcal{E}(\varepsilon)$ $\mathcal{E}(\mathsf{a})$ $\mathcal{E}(\mathsf{aba})$



- <u>a $<_L$ c $<_L$ b</u> $\Longrightarrow$ b $<_R$ c $<_R$ a

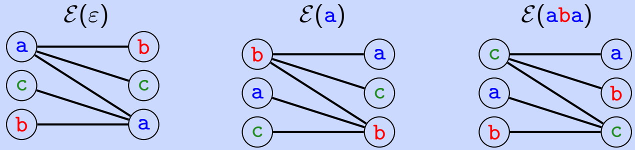
$\mathcal{E}(\mathsf{aba})$



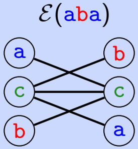
Planární dendrické jazyky

Příklad

Jazyk Tribonacciho slova **<u>není</u>** planární dendrický jazyk.
Vskutku, uvažujme rozšíření grafů tři zvláštních slov ε, a a aba.



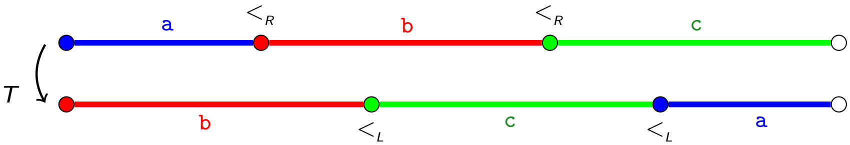
- $\underline{a <_L c <_L b} \quad \Longrightarrow \quad b <_R c <_R a \quad ↯$

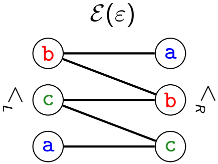


Planární dendrické jazyky

Věta [S. Ferenczi, L. Zamboni (2008)]

Množina $\mathcal{L}$ je jazyk pro regulární výměnu intervalových tehdy a jen tehdy pokud je to *rekurentní planární dendrický jazyk*.





Rekurentní a steinoměrně rekurentní slova

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *rekurentní* pokud pro všechný $u, v \in \mathcal{L}$ existuje $w \in \mathcal{L}$ takové, že uwv je v $\mathcal{L}$.

Příklad (Fibonacci)

$$\mathbf{x} = \mathtt{abaababaabaababaababaabaababaaba} \cdots$$

Rekurentní a steinoměrně rekurentní slova

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *rekurentní* pokud pro všechný $u, v \in \mathcal{L}$ existuje $w \in \mathcal{L}$ takové, že uwv je v $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ je *steinoměrně rekurentní* pokud pro každé slovo $u \in \mathcal{L}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že u je faktorem každého slova délky n v $\mathcal{L}$.

Příklad (Fibonacci)

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathtt{abaa}}_{4}\,\mathtt{ba}\,\underbrace{\mathtt{baab}}_{4}\,\underbrace{\mathtt{aaba}}_{4}\,\mathtt{baababaaba}\,\underbrace{\mathtt{abab}}_{4}\,\mathtt{a}\cdots$$

Rekurentní a steinoměrně rekurentní slova

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *rekurentní* pokud pro všechny $\mathtt{u}, v \in \mathcal{L}$ existuje $w \in \mathcal{L}$ takové, že uwv je v $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ je *steinoměrně rekurentní* pokud pro každé slovo $u \in \mathcal{L}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že u je faktorem každého slova délky n v $\mathcal{L}$.

- Arnoux-Rauzy
- regulární výměny intervalů

Rekurentní a steinoměrně rekurentní slova

Definice

Jazyk $\mathcal{L}$ je *rekurentní* pokud pro všechny $u, v \in \mathcal{L}$ existuje $w \in \mathcal{L}$ takové, že uwv je v $\mathcal{L}$.

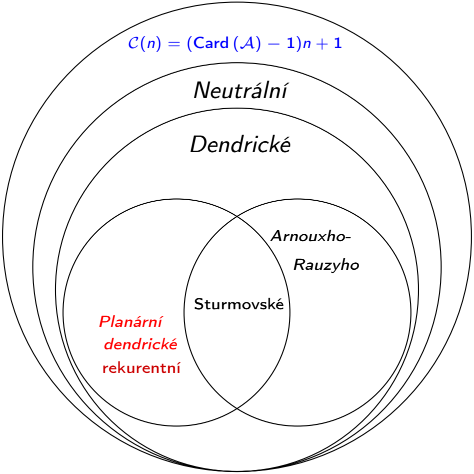
$\mathcal{L}$ je *steinoměrně rekurentní* pokud pro každé slovo $u \in \mathcal{L}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že u je faktorem každého slova délky n v $\mathcal{L}$.

- Arnoux-Rauzy
- regulární výměny intervalů

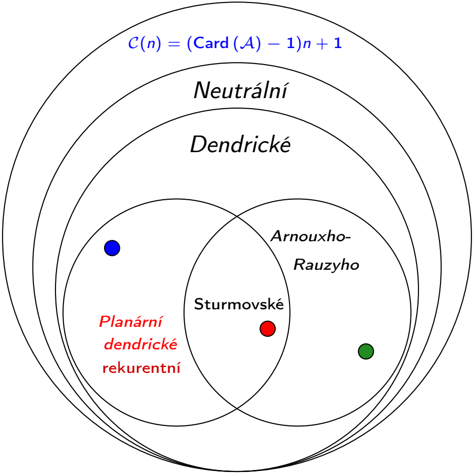
Tvrzení

Steinoměrně rekurentní $\Longrightarrow$ Rekurentní.

Dendrické a neutrální jazyky

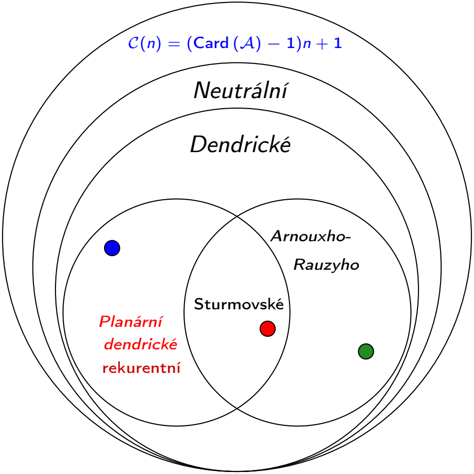


Dendrické a neutrální jazyky



- Fibonacci
- Tribonacci
- regulární VI

Dendrické a neutrální jazyky



- Fibonacci
- ? 2-kódovaný Fibonacci
- Tribonacci
- ? 2-kódovaný Tribonacci
- regulární VI
- ? 2-kódovaný regulární VI

Bifixové kódy

Definice

Bifixový kód je množina $B \subset \mathcal{A}^+$ neprázdných slov, která neobsahuje žádný vlastní prefix nebo sufix svých prvků.

Příklad

- ✓ $\{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}$
- ✓ $\{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{bba}, \mathtt{bbb}\}$
- ✓ $\{\mathtt{ac}, \mathtt{bcc}, \mathtt{bcbca}\}$
- ✗ $\{\ \mathtt{pivnice}, \mathtt{pivo}, \mathtt{pivovar}\ \}$
- ✗ $\{\ \mathtt{becherovka}, \mathtt{beton}, \mathtt{rovka}\ \}$
- ✗ $\{\ \mathtt{s}, \mathtt{slivovice}, \mathtt{vice}\ \}$

Bifixové kódy

Definice

Bifixový kód je množina $B \subset \mathcal{A}^+$ neprázdných slov, která neobsahuje žádný vlastní prefix nebo sufix svých prvků.

Bifixový kód $B \subset \mathcal{L}$ je *$\mathcal{L}$-maximální* pokud není vlastní podmnožinou žádného bifixového kódu $C \subset \mathcal{L}$.

Příklad (Fibonacci)

Množina $B = \{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}$ je $\mathcal{L}$-maximální bifixový kód.
Ale není $\mathcal{A}^*$-maximální bifixový kód, protože $B \subset B \cup \{\mathtt{bb}\}$.

Bifixové kódy

Definice

Bifixový kód je množina $B \subset \mathcal{A}^+$ neprázdných slov, která neobsahuje žádný vlastní prefix nebo sufix svých prvků.

Bifixový kód $B \subset \mathcal{L}$ je *$\mathcal{L}$-maximální* pokud není vlastní podmnožinou žádného bifixového kódu $C \subset \mathcal{L}$.

Kódovací morfismus pro bifixový kód $B \subset A^+$ je morfismus $f : \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ který zobrazuje bijektivně $\mathcal{B}$ na B.

Příklad

Zobrazení $f : \{\mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{w}\}^* \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ je kódovací morphismus pro $B = \{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}$.

$$f : \begin{cases} \mathtt{u} \mapsto \mathtt{aa} \\ \mathtt{v} \mapsto \mathtt{ab} \\ \mathtt{w} \mapsto \mathtt{ba} \end{cases}$$

Bifixové kódy

Definice

Bifixový kód je množina $B \subset \mathcal{A}^+$ neprázdných slov, která neobsahuje žádný vlastní prefix nebo sufix svých prvků.

Bifixový kód $B \subset \mathcal{L}$ je *$\mathcal{L}$-maximální* pokud není vlastní podmnožinou žádného bifixového kódu $C \subset \mathcal{L}$.

Kódovací morfismus pro bifixový kód $B \subset A^+$ je morfismus $f : \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$ který zobrazuje bijektivně $\mathcal{B}$ na B.

Příklad

Zobrazení $f : \{\mathtt{u}, \mathtt{v}, \mathtt{w}\}^* \to \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ je kódovací morphismus pro $B = \{\mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}$.

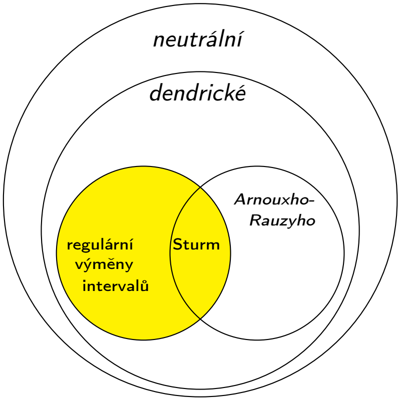
$$f : \begin{cases} \mathtt{u} \mapsto \mathtt{aa} \\ \mathtt{v} \mapsto \mathtt{ab} \\ \mathtt{w} \mapsto \mathtt{ba} \end{cases}$$

Když $\mathcal{L}$ je jazyk a B je $\mathcal{L}$-maximální bifixový kód, množina $f^{-1}(\mathcal{L})$ se jmenuje *maximální bifixové dekódování $\mathcal{L}$*.

Maximální bifixové dekódování

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015)]

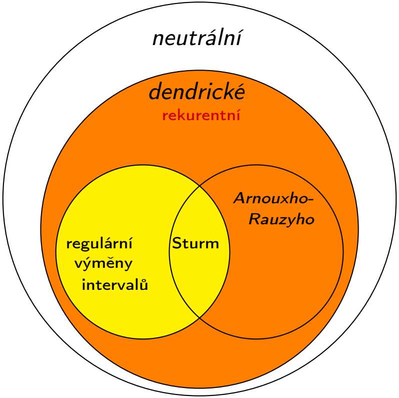
Třída jazyků pro regulární výměny intervalů je uzavřena na maximální bifixové dekódování.



Maximální bifixové dekódování

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015)]

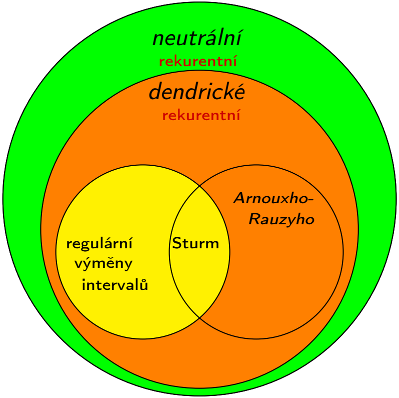
Třída *rekurentních* dendrických jazyků je uzavřena na maximální bifixové dekódování.



Maximální bifixové dekódování

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015); D., Perrin (2016)]

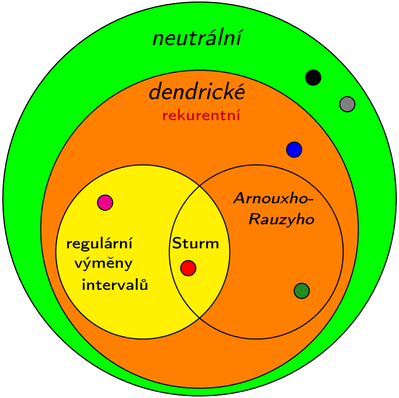
Třida *rekurentních* neutrálních jazyků je uzavřena na maximální bifixové dekódování.



Maximální bifixové dekódování

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015); D., Perrin (2016, 2019)]

Třída *rekurentních* neutrálních jazyků je uzavřena na maximální bifixové dekódování.



- Fibonacci
- 2-kódovaný Fibonacci
- Tribonacci
- 2-kódovaný Tribonacci

Návratová slova

(*Pravé*) *návratové slovo* k w v $\mathcal{L}$ je neprázdné slovo u takové, že $wu \in \mathcal{L}$ má w pouze jako prefix a jako sufix, ale ne jako vnitřní faktor. Formalně,

$$\mathcal{R}(w) = \{u \in \mathcal{A}^+ \mid wu \in \mathcal{L} \cap (\mathcal{A}^+ w \setminus \mathcal{A}^+ w \mathcal{A}^+)\}$$

Příklad (Fibonacci)

$\mathcal{R}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{a}\underline{\mathtt{b}}, \mathtt{aa}\underline{\mathtt{b}}\}$

$$\varphi(\mathtt{a})^\omega = \mathtt{abaababa\underline{b}aabaababaababaa\underline{b}aababaabaab}\cdots$$

Návratová slova

(*Pravé*) *návratové slovo* k w v $\mathcal{L}$ je neprázdné slovo u takové, že $wu \in \mathcal{L}$ má w pouze jako prefix a jako sufix, ale ne jako vnitřní faktor. Formalně,

$$\mathcal{R}(w) = \{u \in \mathcal{A}^+ \mid wu \in \mathcal{L} \cap (\mathcal{A}^+ w \setminus \mathcal{A}^+ w \mathcal{A}^+)\}$$

Příklad (Fibonacci)

$\mathcal{R}(\mathtt{aa}) = \{\mathtt{b\underline{aa}}, \mathtt{bab\underline{aa}}\}$

$$\varphi(\mathtt{a})^\omega = \mathtt{abaababa\underline{aa}baababaababaabaa\underline{aa}babaabaab}\cdots$$

Mohutnost návratovích slov

Věta [Vuillon (2001)]

Nechť $\mathcal{L}$ je Sturmovský jazyk. Pro každé $w \in \mathcal{L}$, máme

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{R}(w)) = 2.$$

Mohutnost návratovích slov

Věta [Vuillon (2001); Balková, Pelantová, Steiner (2008)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní neutrální jazyk. Pro každé $w \in \mathcal{L}$, máme

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{R}(w)) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{A})\,.$$

Mohutnost návratovích slov

Věta [Vuillon (2001); Balková, Pelantová, Steiner (2008)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní neutrální jazyk. Pro každé $w \in \mathcal{L}$, máme

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{R}(w)) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{A})\,.$$

Korolár

Neutrální (dendrický) jazyk je rekurentní tehdy a jen tehdy když je steinoměrně rekurentní

Důkaz.. Rekurentní jazyk $\mathcal{L}$ je steinoměrně rekurentní tehdy a jen tehdy když $\mathcal{R}(w)$ je konečný pro všechna $w \in \mathcal{L}$.

Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015),]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

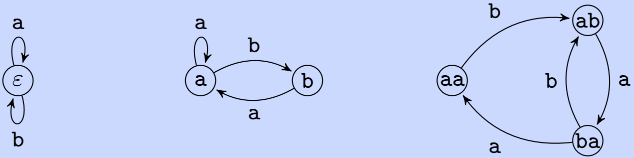
Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)

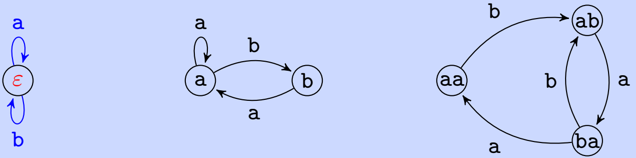


Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)



$$\Gamma_{\varepsilon} = \langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle = \mathbb{F}_{\mathcal{A}}$$

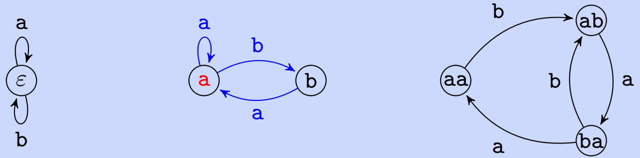
Rauzyho grafy

a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)



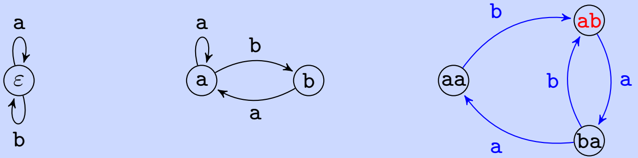
$$\Gamma_{\mathrm{a}} = \langle \mathrm{a}, \mathrm{ba} \rangle$$

Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{aa}, \mathtt{ab}, \mathtt{ba}, \mathtt{aab}, \mathtt{aba}, \mathtt{baa}, \mathtt{bab}, \ldots\}$)



$$\Gamma_{\mathtt{ab}} = \langle \mathtt{a}(\mathtt{ba})^*\mathtt{ab} \rangle$$

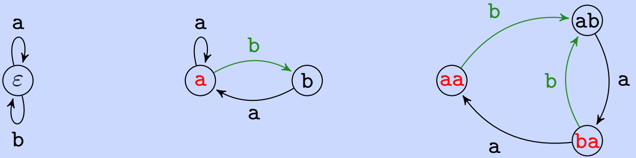
Rauzyho grafy

a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)



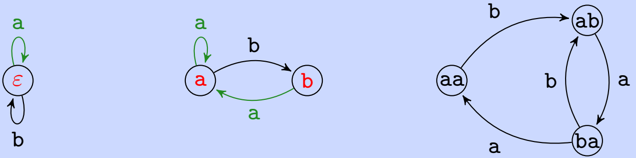
$$G_2(\mathcal{L}) \rightsquigarrow G_1(\mathcal{L})$$

Rauzyho grafy
a Stallingsova skládání

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone (2015), Goulet-Ouellet (2021)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický (stačí jen sufixový-souvislý) jazyk obsahující abecedu $\mathcal{A}$. Pro libovolná $w \in \mathcal{L}$, množina $\mathcal{R}(w)$ generuje volnou grupu $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci, $\mathcal{L} = \{\varepsilon, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{aa}, \mathrm{ab}, \mathrm{ba}, \mathrm{aab}, \mathrm{aba}, \mathrm{baa}, \mathrm{bab}, \ldots\}$)



$$G_2(\mathcal{L}) \rightsquigarrow G_1(\mathcal{L}) \rightsquigarrow G_0(\mathcal{L})$$

Věta o návratu

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Ridone (2015)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický jazyk. Pro všechna $w \in \mathcal{L}$ je $\mathcal{R}(w)$ báze volné grupy $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci)

Množina $\mathcal{R}(\mathtt{b}) = \{\mathtt{ab}, \mathtt{aab}\}$ je báze volné grupy. Vskutku,

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &= \mathtt{aab}\,(\mathtt{ab})^{-1} \\ \mathtt{b} &= \mathtt{a}^{-1}\,\mathtt{ab} \end{aligned}$$

Věta o návratu

Věta [Berthé, De Felice, D., Leroy, Perrin, Reutenauer, Ridone (2015)]

Nechť $\mathcal{L}$ je rekurentní dendrický jazyk. Pro všechna $w \in \mathcal{L}$ je $\mathcal{R}(w)$ báze volné grupy $\mathbb{F}_{\mathcal{A}}$.

Příklad (Fibonacci)

Množina $\mathcal{R}(\mathtt{aa}) = \{\mathtt{aab}, \mathtt{aabab}\}$ je báze volné grupy. Vskutku,

$$\begin{aligned} \mathtt{a} &= \mathtt{aab}\,(\mathtt{aabab})^{-1}\,\mathtt{aab} \\ \mathtt{b} &= \mathtt{a}^{-1}\,\mathtt{a}^{-1}\,\mathtt{aab} \end{aligned}$$

Děkuji za pozornost [1, 2]

1 Ďakujem za pozornosť

Merci pour l'attention

2 A díky Janě za pomoc v češtině