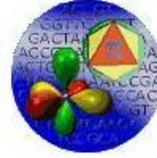


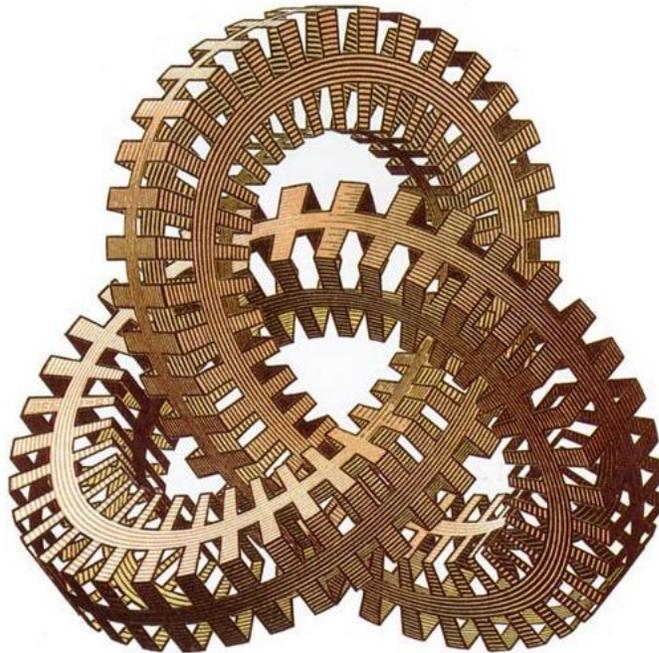


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FE. NN.
Corso di Laurea in Matematica



Cenni sulla Teoria dei Nodi



Presentata da:
Francesco Dolce

Relatore:
Prof. Claudio G. Bartolone

Anno Accademico 2008/2009

La matematica non si capisce, alla matematica ci si abitua.
John von Neumann

Indice

Prefazione	v
1 Nozioni di base	1
1.1 Prime definizioni	1
1.2 Equivalenza tra nodi	2
1.3 Nodi domestici e nodi selvaggi	3
1.4 Diagrammi piani	5
1.5 Mosse di Reidemeister	7
1.6 Operazioni sui nodi	8
1.6.1 Somma connessa	9
2 Invarianti	11
2.1 Primi invarianti	11
2.1.1 Numero di componenti	11
2.1.2 Crossing number	12
2.1.3 Stick number	12
2.1.4 Unknot number	14
2.2 Linking number	14
2.3 3-colorabilità	16
2.3.1 Numero di tricolorabilità	18
2.3.2 p -colorabilità	20
2.4 Polinomi	21
2.4.1 Bracket di Kauffman	22
2.4.2 Bracket di Kauffman e mosse di Reidemeister	22
2.4.3 Writhe	24
2.4.4 Il polinomio $X(L)$	25
2.4.5 Il polinomio $V(L)$	27
2.4.6 Relazione skein di $V(L)$	27

3	Gruppo fondamentale di un nodo	31
3.1	Gruppo fondamentale e presentazione di un gruppo	31
3.2	Gruppo fondamentale di un nodo	32
3.3	Presentazione di Wirtinger	33
4	Grafi	37
4.1	Grafi e diagrammi piani	39
4.1.1	Dal diagramma al grafo	39
4.1.2	Dal grafo al diagramma	40
4.1.3	Grafi e mosse di Reidemeister	41
4.2	Grafi intrinsecamente concatenati e intrinsecamente annodati	43
4.2.1	Grafi intrinsecamente concatenati	43
4.2.2	Grafi intrinsecamente annodati	45
5	Trecce	47
5.1	Il gruppo B_n	48
5.1.1	Trecce elementari	49
5.2	Chiusura di una treccia	52
5.2.1	Teorema di Alexander	53
5.2.2	L'algoritmo di Vogel	53
5.2.3	Trecce Markov-equivalenti	56

Prefazione

Non appena Alessandro raggiunse la città di Gordio, i sacerdoti del luogo lo informarono del nodo e della sua profezia. Nell'acropoli, là dove erano situati il palazzo del vecchio re Gordio e di suo figlio Mida, vi è era un carro la cui stanga era assicurata ad un palo con un intricato nodo di corteccia e corniolo. Chiunque fosse riuscito a sciogliere quel nodo - recitava la profezia - sarebbe diventato re dell'intero mondo conosciuto. Alessandro osservò attentamente l'intreccio senza però riuscire a scorgere né l'inizio né la fine. Dopo alcuni attimi di riflessione sguainò la spada e, con un colpo secco, tagliò a metà il nodo. Fatto ciò partì alla conquista dell'Asia, raggiungendo l'Indo e l'Oxus, avverando così la profezia.

Matematicamente parlando la *soluzione alessandrina* non era accettabile. Il condottiero macedone ha dunque barato. Ma matematica e leggenda non sempre vanno di pari passo.

La teoria dei nodi è una branca della geometria sviluppatasi relativamente tardi. Alessandro Magno ed uno sparuto gruppo di matematici a parte (alcuni dei quali però di rilievo, quali Vandermonde ed il *principe* Gauss) bisognerà aspettare la fine del XX secolo per vedere tale teoria trovare una formalizzazione.

Negli anni '80 del secolo appena passato quella che era una disciplina marginale e semiconosciuta anche tra gli stessi matematici si diffuse e gli studiosi che se ne occupavano cominciarono a sfornare nuovi risultati, esplorando nuove aree di ricerca e trovare collegamenti con aree della matematica già note.

Le pagine che seguono non intendono essere una trattazione esaustiva della teoria dei nodi. Lo scopo di tale elaborato è fornire un'introduzione alla teoria di base con uno sguardo ad alcuni dei numerosi campi ad essa affini e ad alcuni dei problemi ancora aperti in tali ambiti.

Il CAPITOLO 1 presenta le definizioni ed i concetti di base di *nodi*, *link* e *diagrammi piani*, esibendo anche il fondamentale risultato di Reidemeister.

Nel CAPITOLO 2 è introdotto il concetto di *invariante* con alcuni semplici esempi tra cui l'invariante "storico" del *linking number* dovuto a Gauss. Si introduce anche la potente classe di invarianti dei polinomi, studiando un po' più nel dettaglio il *polinomio di Jones* (che valse al suo scopritore la medaglia Fields), quest'ultimo visto attraverso l'ottica di Kauffman e delle sue *bracket*.

Il CAPITOLO 3 mostra come affrontare la teoria dei nodi sfruttando i concetti della topologia algebrica, in particolare quello del *Gruppo di Poincaré*.

Negli ultimi due capitoli, invece, sono affrontati due dei numerosi collegamenti tra la teoria dei nodi ed altre branche della matematica. In particolare il CAPITOLO 4 tratta di due distinte connessioni tra nodi e *grafi*, mentre nel CAPITOLO 5 si discute dello stretto rapporto tra nodi e *treccie*. Essendo la teoria delle treccie, come la teoria dei nodi, poco conosciuta ai non addetti ai lavori, si è scelto di partire dalle definizioni di base e di introdurre i concetti chiave prima di lanciare un ponte tra le due diverse branche della geometria.

Eventuali errori o inesattezze sono da attribuire unicamente all'autore. Per ciò che rimane di corretto è invece d'obbligo una condivisione di meriti. Per tale ragione un ringraziamento va al Professor C. G. Bartolone che, con un mix di curiosità per argomenti mai approfonditi prima e fiducia nelle mie capacità, mi ha dato l'opportunità di affrontare tale studio e di confrontarmi con un pubblico esperto. Ad A. Di Bartolo, F. Ciraulo e G. Falcone un ringraziamento per avermi dato ascolto e per i suggerimenti e gli spunti di riflessione dati.

La tesi di laurea è però solo un momento, l'ultimo in ordine cronologico, dell'intero percorso formativo. Per tale ragione ai ringraziamenti bisognerebbe aggiungere i nomi di colleghi e docenti che in questi anni mi hanno guidato ed accompagnato, e che ho trovato disponibili in momenti in difficoltà sia di studio sia tecniche (sia burocratiche). L'elenco sarebbe non corto ed esplicitandolo rischerei, oltre che di annoiare, di dimenticare qualcuno. Spero, dunque, che i diretti interessati mi perdonino tale omissione.

Infine un grazie alle persone a cui tengo e che nel passato mi sono state vicine; un grazie a coloro che mi sono vicini nel presente; per ringraziare chi mi sarà vicino nel futuro, invece, ancora c'è tempo.

Francesco Dolce
Palermo, Luglio 2009

Capitolo 1

Nozioni di base

1.1 Prime definizioni

Preso una curva chiusa in \mathbb{R}^3 , questa gode di differenti proprietà a seconda di come sia posizionata rispetto a se stessa, ovvero di come sia *annodata*. La teoria dei nodi è la branca della matematica che si occupa di formalizzare questa nozione intuitiva e di studiare similitudini e differenze tra tali curve.

Definizione 1 $K \subset \mathbb{R}^3$ è detto **nodo** se \exists un omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $K = \varphi(S^1)$

È anche possibile definire il nodo non come lo spazio topologico ma come la funzione φ della definizione precedente. Un'ulteriore ambiguità di linguaggio vi sarà quando si definirà una relazione di equivalenza tra nodi. In quel caso il termine **nodo** indicherà l'intera classe di equivalenza. A seconda del contesto risulterà chiaro a quale delle definizioni ci si riferisce.

Estensione intuitiva del concetto di nodo è quello di **link**.

Definizione 2 $L \subset \mathbb{R}^3$ è detto **link** di m componenti se $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ con K_i nodo $\forall i = 1, 2, \dots, m$ e $K_j \cap K_l = \emptyset$ se $j \neq l$.

In figura 1.1 sono rappresentati due esempi di nodi ed uno di link. Il primo nodo è detto *nodo banale* o *non-nodo*, il secondo è chiamato *nodo trifoglio* e l'ultimo *link di Hopf*.

Se preso un nodo si sceglie un verso di percorrenza, questo sarà detto **nodo orientato**. Esempi di nodi e link orientati sono presenti in figura 1.2.

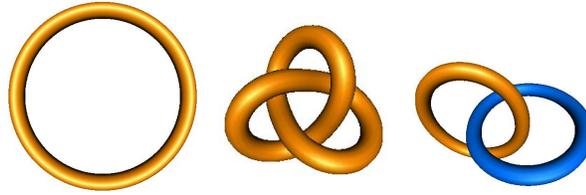


Figura 1.1: Esempi di nodi e link

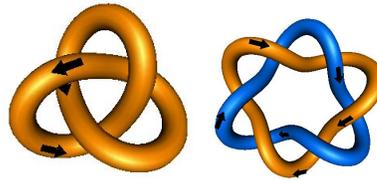


Figura 1.2: Esempi di nodi e link orientati

1.2 Equivalenza tra nodi

Gran parte dello studio della teoria dei nodi si concentra nell'identificare quali nodi possano essere trasformati tramite omotopie gli uni negli altri.

Si può lavorare, invece che sugli spazi topologici, sulle funzioni che trasformano la S^1 in K .

Definizione 3 Due immersioni $\varphi_0, \varphi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono dette isotope se $\exists F : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua tale che $\forall t \in [0, 1]$ si ha $F(x, t)$ immersione.

Con tale definizione è effettivamente possibile definire una relazione di equivalenza tra le immersioni $\varphi : S^1 \rightarrow K$. Tale equivalenza è però banale, in quanto è possibile ricondurre ogni nodo al non-nodo tramite opportune isotopie. L'idea del risultato è data dalla figura 1.3

Definizione 4 Due immersioni $\varphi_0, \varphi_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono dette ambientalmente isotope se $\exists H : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua tale che $\forall t \in [0, 1]$ h_t è un omeomorfismo e inoltre $h_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ e $h_1\varphi_0 = \varphi_1$.

Diremo che due nodi sono tra loro **equivalenti** se le relative immersioni sono tra loro isotope.

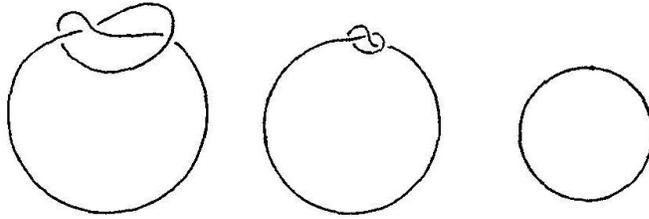


Figura 1.3: Nodi isotopi ma non ambientalmente isotopi

Uno degli scopi della teoria dei nodi è riuscire a distinguere se due nodi sono tra loro equivalenti, ovvero, dato un nodo, riuscire a riconoscere se questo è equivalente ad un nodo già tabulato e studiato.

Un caso particolare del problema di riconoscimento di equivalenza tra due nodi o link è il *problema dello scioglimento* che consiste nel decidere se un nodo K è o meno equivalente alla circonferenza S^1 . In tal caso K sarà detto *non nodo*.

Nel 1961 **Wolfgang Haken** costruì un algoritmo capace di decidere se un nodo fosse o meno il non-nodo. Tale algoritmo ha però una complessità computazionale talmente alta da non poter essere implementato da alcuna macchina.

1.3 Nodi domestici e nodi selvaggi

Una particolare classe di nodi sono i *nodi poligonali*, costituiti da un numero finito di segmenti consecutivi, detti *lati*, i cui estremi sono detti *vertici*. Detto in altri termini un nodo poligonale è una linea spezzata chiusa in \mathbb{R}^3 .

Esempi di nodi poligonali sono riportati in figura 1.4.



Figura 1.4: Alcuni nodi poligonali

Definizione 5 Si definisce Δ -mossa la sostituzione (in uno qualsiasi dei due versi) di un segmento l_0 con due segmenti consecutivi l_1 ed l_2 tali che il primo estremo di l_1 ed il secondo di l_2 coincidano rispettivamente coi due estremi di l_0 (vedi figura 1.5).

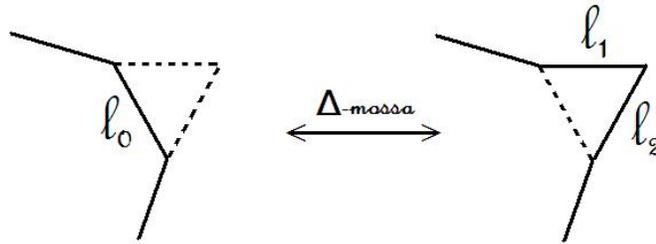


Figura 1.5: Δ -mossa

Due nodi poligonali sono equivalenti se e solo se collegati da una serie di Δ -mosse.

Definizione 6 Un nodo è detto **domestico** se è equivalente ad un nodo poligonale. Un nodo non domestico è detto **selvaggio**.

Una caratterizzazione dei nodi domestici è data dal seguente risultato.

Teorema 1 Un nodo parametrizzato da archi di classe C^1 è domestico.

Un esempio notevole di nodo selvaggio è data dalla figura 1.6. Da notare che la curva che lo definisce è continua e differenziabile in tutti i punti diversi da p .

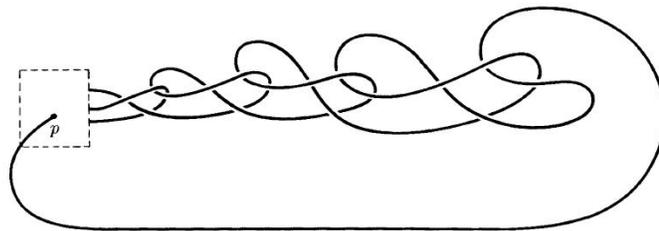


Figura 1.6: Nodo di Fox

Di seguito si tratteranno unicamente nodi domestici, per cui si sottintenderà tale aggettivo.

1.4 Diagrammi piani

Per rappresentare e studiare un nodo è utile considerare una sua proiezione in un piano. Ad esempio la proiezione nel piano (x, y) è data dalla funzione $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\pi(x, y, z) = (x, y)$.

Definizione 7 Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, si dirà **proiezione** di K l'immagine $\pi(K) \subset \mathbb{R}^2$. Un punto $P \in \pi(K)$ tale che $|\pi^{-1}(P)| = r > 1$ è detto **punto multiplo** ed il numero r **ordine** di P .

In generale una proiezione potrà contenere diversi punti multipli con ordine diversi tra loro. Una proiezione in cui i punti multipli sono in numero finito, tutti doppi e nessuno in corrispondenza di estremi relativi (di vertici nel caso di nodi poligonali) sarà detta in *posizione regolare* (vedi figura 1.7).

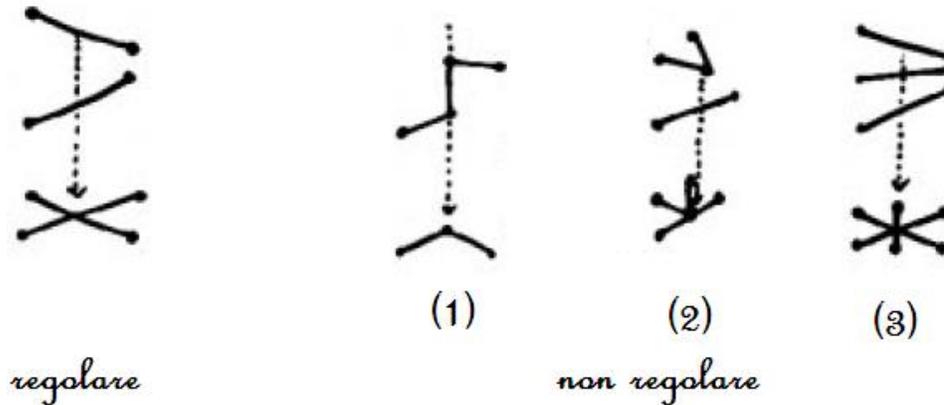


Figura 1.7: Proiezioni regolari e non regolari

Definizione 8 Si dice ε -*perturbazione* applicata al punto x una omotopia applicata al nodo che lasci invariato $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(x, \varepsilon)$.

Teorema 2 (i) se $\pi(K)$ è irregolare, $\exists \varepsilon > 0$ tale che è possibile applicare una ε -*perturbazione* in modo da ottenere una proiezione regolare;

(ii) se $\pi(K)$ è regolare allora $\exists \delta > 0$, tale che $\forall \varepsilon < \delta$ applicando una ε -perturbazione si ottiene ancora una proiezione regolare.

Dunque le proiezioni regolari sono generiche, ovvero costituiscono un sottoinsieme aperto e denso nell'insieme delle proiezioni.

Definizione 9 Un punto doppio di una proiezione di nodo è detto **incrocio**. L'intorno del punto dell'anti-immagine con coordinata z maggiore è detto **ramo superiore** mentre l'intorno del punto con coordinata minore **ramo inferiore**.

Per distinguere i due rami si è soliti rappresentare con tratto continuo il ramo superiore e con uno discontinuo nell'incrocio il ramo inferiore come mostrato in figura 1.8.



Figura 1.8: Incrocio con informazioni su quale sia il ramo superiore e quale il ramo inferiore

Definizione 10 Una proiezione regolare di un nodo con informazioni sugli incroci è detta **diagramma piano** del nodo.

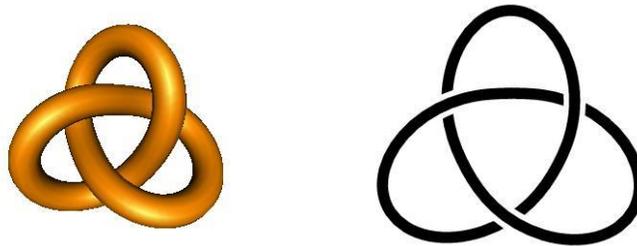


Figura 1.9: Nodo trifoglio e suo diagramma piano

Una particolare classe di nodi è quella dei nodi **alternanti**.

Definizione 11 Una diagramma piano è detto **alternante** se percorrendolo lungo una direzione fissata si alternano i rami superiori e quelli inferiori. Un nodo è detto **alternante** se possiede almeno un diagramma alternante.

1.5 Mosse di Reidemeister

Uno stesso nodo può essere rappresentato con una quantità infinita di diagrammi piani. Nel 1932 **Kurt Reidemeister** dimostrò che due diversi diagrammi rappresentano lo stesso nodo se e solo se è possibile passare dall'uno all'altro attraverso una successione di *mosse*, ovvero dei cambiamenti locali che permettono di variare una piccola porzione del diagramma lasciando il resto inalterato.

Oltre alle isotopie planari, indicate con Ω_0 , Reidemeister studiò i casi in cui per passare da un diagramma ad un altro si debba passare attraverso proiezioni non regolari. Le tre mosse Ω_1 , Ω_2 ed Ω_3 (più la già citata isotopia planare), sono rappresentate in figura 1.10, 1.11, 1.12 e 1.13.

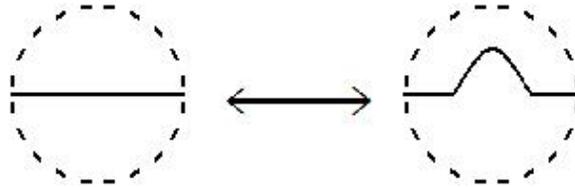


Figura 1.10: Ω_0 , Isotopia planare

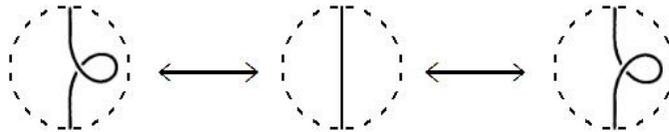


Figura 1.11: Ω_1 , Torcere

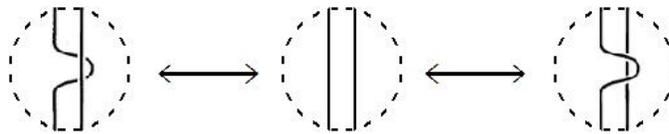


Figura 1.12: Ω_2 , Tirar fuori

Teorema 3 (di Reidemeister) *Due nodi K_1 e K_2 con diagrammi piani rispettivamente D_1 e D_2 sono equivalenti se e solo se i due diagrammi sono collegati da una sequenza di mosse di Reidemeister.*

Figura 1.13: Ω_3 , Scivolare

È importante notare che tale teorema non fornisce alcun algoritmo per stabilire se due nodi sono tra loro equivalenti: nulla si sa su quali mosse di Reidemester applicare per passare da un diagramma ad un altro. In generale non è neanche garantito che la giusta sequenza di mosse preveda di *semplificare* il diagramma, ovvero di diminuire il numero degli incroci.

1.6 Operazioni sui nodi

Partendo da nodi conosciuti è possibile applicare delle operazioni che permettono di ottenere nuovi nodi (non necessariamente diversi da quelli di partenza).

Tra le operazioni unarie particolare importanza hanno la riflessione speculare e il cambiamento di orientamento. L'immagine speculare di un nodo K , indicata con $spec(K)$ la si può ottenere partendo da un diagramma piano semplicemente invertendo ad ogni incrocio rami superiori e rami inferiori.

Definizione 12 *Un nodo K è detto achirale se coincide con la sua immagine speculare. Un nodo non achirale è detto chirale.*

In figura 1.14 sono mostrati due esempi di nodi: il nodo a figura otto (a sinistra), achirale, ed il nodo trifoglio (a destra) chirale.



Figura 1.14: Esempi di nodi achirali e nodi chirali

Dato K si definisce *opposto*, e lo si indica con \overline{K} , il nodo ottenuto cambiandone l'orientamento.

In figura 1.15 sono mostrati due esempi di nodi: il nodo trifoglio (a sinistra) coincide col proprio opposto, mentre il nodo 8_{17} (a destra) no.

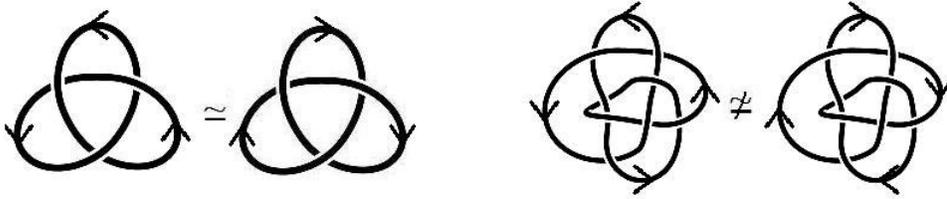


Figura 1.15: Esempi di nodi coincidenti col proprio opposto e non coincidenti

1.6.1 Somma connessa

Definizione 13 *Dati due nodi orientati J e K si definisce somma connessa $J\#K$ il nodo ottenuto rimuovendo un piccolo arco da J ed uno da K e unendo coerentemente i due estremi del primo nodo con quelli del secondo. (ad esempio come in figura 1.16).*

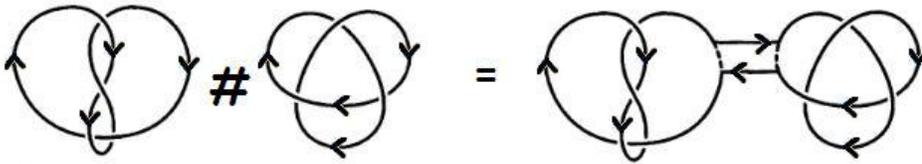


Figura 1.16: Somma connessa tra due nodi

L'insieme dei nodi fornito di tale operazione costituisce un semigrupp. L'elemento neutro è il non-nodo (figura 1.17) e l'operazione risulta essere commutativa (figura 1.18).

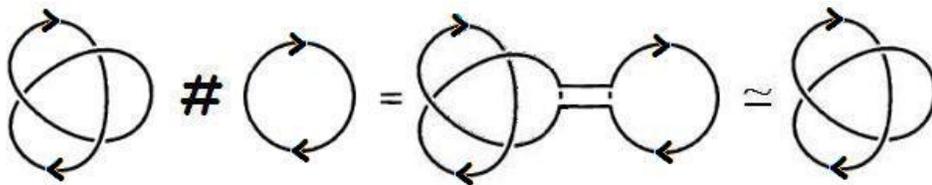


Figura 1.17: Somma connessa tra un nodo K e il non-nodo

Definizione 14 *Un nodo è detto **nodo composto** se è possibile esprimerlo come somma connessa di due nodi ciascuno dei quali è diverso dal non-nodo.*

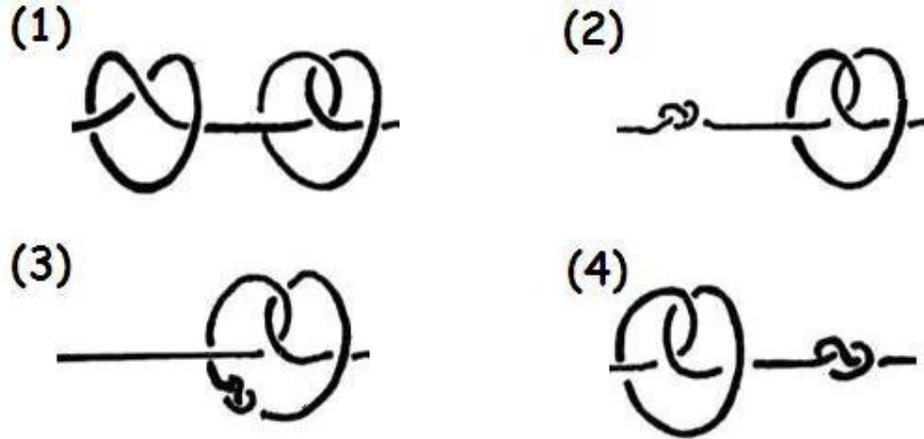


Figura 1.18: Commutatività della somma connessa

Questi due nodi sono detti **fattori** del nodo composto. Un nodo che non è composto è detto **primo**.

Nel 1949 **Herbert Seifert** dimostrò, sfruttando concetti di teoria delle superfici, che qualsiasi nodo può essere fattorizzato in maniera unica come somma connessa di nodi primi.

Capitolo 2

Invarianti

Un ruolo fondamentale nel problema di riconoscimento di equivalenza tra nodi è giocato dagli invarianti.

Definizione 15 *Un invariante di nodi i è una funzione dipendente solo dalla classe di equivalenza del nodo. Ovvero $K \simeq K' \Rightarrow i(K) = i(K')$.*

Un invariante banale potrebbe essere la funzione $zero(K)$ definita come $zero(K) = 0 \quad \forall K$ nodo. Essa associa infatti lo stesso valore ad ogni nodo, in particolare dunque ad ogni nodo equivalente. Tale esempio mostra che se $i(J) \neq i(K)$ allora J e K non sono equivalenti, mentre in generale non è vero il viceversa.

Definizione 16 *Un invariante è detto completo se associa ad ogni diversa classe di equivalenza un valore distinto.*

La ricerca di invarianti completi per nodi e per link è tutt'oggi un problema aperto della teoria dei nodi. Limitandosi allo studio di nodi primi esiste un invariante completo, come si vedrà nel capitolo 3.

2.1 Primi invarianti

Uno dei più semplici invarianti di un link è il suo numero di componenti.

2.1.1 Numero di componenti

Definizione 17 *Dato un link L si definisce $\mu(L)$ come il numero di componenti di L .*

Tale invariante non fornisce informazioni accurate sui link ma è il primo che ci permette di distinguere tra nodi e link a più di una componente. In figura 2.1 sono riportati alcuni esempi di link e relativi valori di μ .

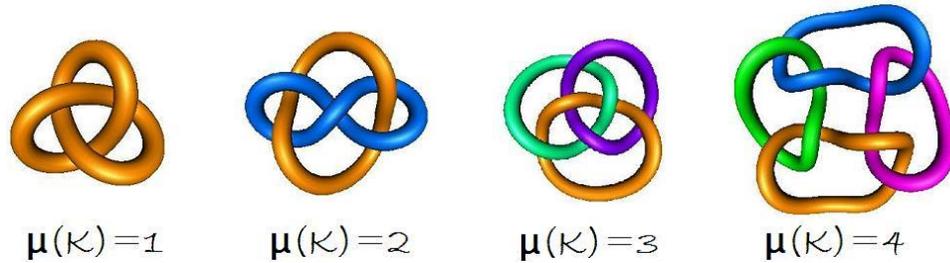


Figura 2.1: Numero di componenti di un link

2.1.2 Crossing number

Un invariante molto importante, alla base della principale tabulazione dei link dovuta ad Alexander e a Briggs, è il *numero di incroci* di un nodo.

Definizione 18 Dato un link L si definisce *crossing number* di L , e lo si indica con $c(L)$, il numero minimo di incroci tra tutti i possibili diagrammi piani di L .

Essendo definito come *numero minimo* la funzione c è banalmente un invariante. Se trovare un maggiorante di $c(K)$ è abbastanza facile - basta prendere un qualsiasi suo diagramma piano e contare il numero di incroci presenti - calcolarne il valore esatto è in generale complicato.

Definizione 19 Dato un link L diremo che un suo diagramma piano D è minimo se il numero di incroci presenti è esattamente uguale a $c(L)$ (vedi figura 2.2).

Tra i nodi l'unico ad avere $c(K) = 1$ è il non-nodo, mentre tutti gli altri assumono valore maggiore o uguale a 3 (in particolare il nodo trifoglio è l'unico ad avere $c = 3$).

2.1.3 Stick number

Un invariante collegato alla teoria dei grafi, ed in particolare alla teoria di Ramsey, è lo *stick number*.

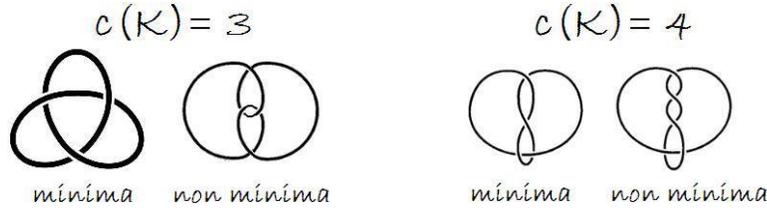


Figura 2.2: Diagrammi minimi e non minimi degli stessi nodi

Definizione 20 Dato un nodo K si definisce stick number di K , e lo si indica con $s(K)$ il numero minimo di segmenti necessari a formare una spezzata nello spazio equivalente ad K .

Lo stick number del non-nodo è 3, ed è possibile dimostrare che nessun nodo non banale ammette s pari a 4 o 5. L'unico nodo ad assumere valore 6 è il nodo trifoglio (vedi figura 2.3).

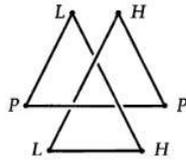


Figura 2.3: Rappresentazione minimale tramite spezzata del nodo trifoglio (i vertici segnati in \mathbf{P} sono nel piano $z = 0$, quelli in \mathbf{H} ad altezza positiva e quelli in \mathbf{L} ad altezza negativa)

Nel 1991 **S. Negami** mostrò che gli unici nodi realizzabili con 7 stick sono il nodo banale, il nodo trifoglio (entrambi realizzabili con meno di 7 segmenti) ed il nodo *a figura otto*. Dunque lo stick number di quest'ultimo è esattamente 7 (vedi figura 2.4).

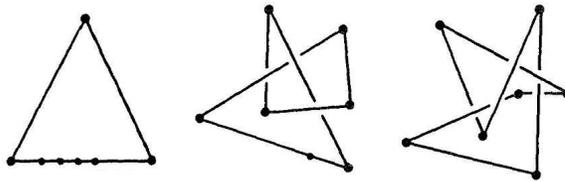


Figura 2.4: Gli unici nodi rappresentabili con 7 stick sono il non-nodo, il trifoglio e il nodo a figura 8

Come mostrato in figura 2.5 è possibile rappresentare il nodo 5_1 con una spezzata di 8 segmenti, dunque $s(5_1) = 8$.

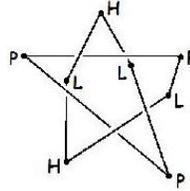


Figura 2.5: Rappresentazione minimale tramite spezzata del nodo 5_1 (**P**, **H** e **L** hanno lo stesso significato che in figura 2.3)

2.1.4 Unknot number

Un altro invariante che risulta molto utile in teoria dei nodi è il *numero di scioglimento*. Esso è legata all'operazione di **flip** di un incrocio di un nodo. Questa consiste nello scambiare tra loro ramo superiore e ramo inferiore (vedi figura 2.6).

Definizione 21 Dato un nodo K si definisce unknotting number, e lo si denota con $u(K)$, il numero minimo di flip da applicare ad incroci del nodo in modo da ottenere il non-nodo.

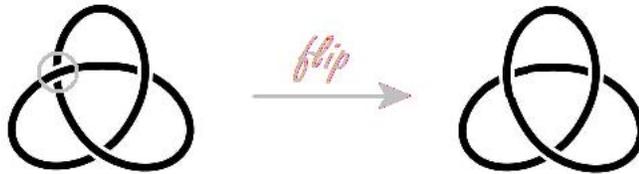


Figura 2.6: Il nodo trifoglio ha unknotting number pari ad 1

2.2 Linking number

Uno dei primi invarianti per link, e forse uno dei più importanti dal punto di vista storico, è il *numero di concatenamento*, introdotto nel 1833 da **Carl Friedrich Gauss**. Egli era interessato alle coppie di circuiti percorsi da corrente e alla relativa circuitazione, dunque lo definì solo per link di due

componenti. La definizione è però naturalmente estendibile a link con un numero n arbitrario di componenti.

Definizione 22 Dato un diagramma D di un link orientato L , si assegni ad ogni incrocio c il valore:

- $+1$ se i rami appartengono a due componenti diverse ed il ramo superiore va dal basso a sinistra verso l'alto a destra;
- -1 se i rami appartengono a due componenti diverse ed il ramo superiore va dal basso a destra verso l'alto a sinistra;
- 0 se i rami appartengono alla stessa componente (vedi figura 2.7).

Si definisce linking number di L , e lo si indica con $lk(L)$ la semisomma dei valori degli incroci, ovvero

$$Lk(L) = \frac{1}{2} \sum_{c \text{ incrocio di } D} Lk(c)$$

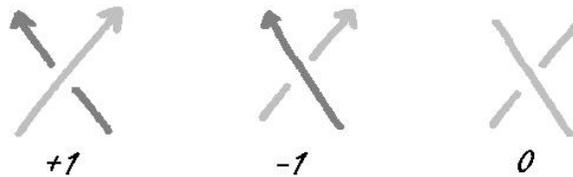


Figura 2.7: Valore da assegnare ad ogni singolo incrocio

Tale definizione è ben posta, ovvero è indipendente dalla scelta del diagramma piano. Per dimostrare ciò, e dunque per mostrare che Lk è un invariante, basta mostrare che il valore di Lk non cambia applicando le mosse di Reidemeister.

Le isotopie planari non generano nuovi incroci, dunque Ω_0 non fa variare il valore di Lk . Neanche Ω_1 modifica tale valore, in quanto applicandola si crea o si distrugge un auto-incrocio che, per definizione, ha peso 0 nella somma (vedi figura 2.8).

Applicando Ω_2 si creano o si disfanno due nuovi incroci, questi contribuiranno però uno con $+1$ e l'altro con -1 . La somma totale degli incroci nella regione sarà dunque sempre 0 (vedi figura 2.9).

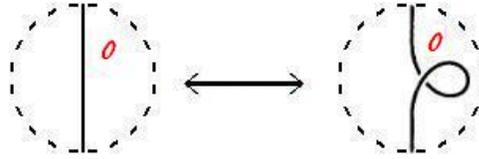


Figura 2.8: Lk è invariante rispetto ad Ω_1

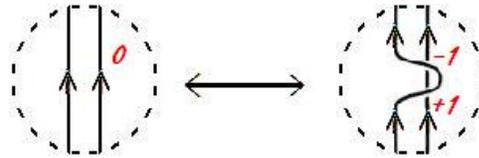


Figura 2.9: Lk è invariante rispetto ad Ω_2

Applicando Ω_3 il numero degli incroci non varia. I due incroci *scivolati* si scambieranno la positività (vedi figura 2.10), ma la somma totale resterà inalterata.

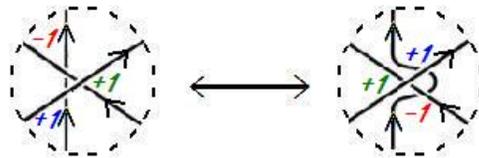


Figura 2.10: Lk è invariante rispetto ad Ω_3

Al contrario degli invarianti precedenti, il linking number dipende dall'orientazione dei link. Tale funzione riesce, ad esempio, a distinguere i due diversi tipi di link di Hopf, come mostrato in figura 2.11.

Il primo ad accorgersi della non completezza di tale invariante fu **James Clerk Maxwell**, il quale, quarant'anni dopo la scoperta di Gauss, trovò l'esempio di due circuiti concatenati tra loro in maniera non banale ma che restituivano linking number nullo (vedi figura 2.12).

2.3 3-colorabilità

Altri due invarianti di link, di natura combinatoria, sono la tricolorabilità e il collegato indice di 3-colorazioni.

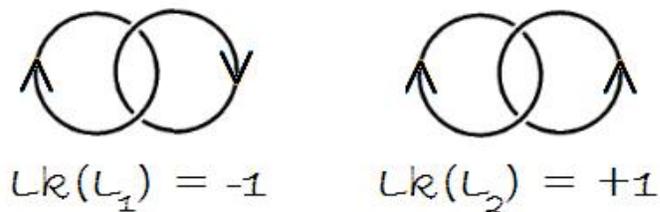


Figura 2.11: A seconda della reciproca orientazione distinguiamo due diversi link di Hopf

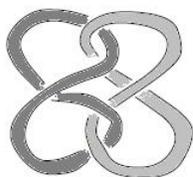


Figura 2.12: Il link di Maxwell, o di Whitehead, è non banale ma assume Lk pari a zero

Definizione 23 Siano α_1 , α_2 e α_3 tre colori. Si dirà che un link L è 3-colorabile se preso un qualsiasi suo diagramma piano è possibile colorare gli archi seguendo le seguenti regole:

- (i) vengono usati almeno due dei tre colori;
- (ii) ad ogni incrocio o tutti e tre gli archi sono dello stesso colore o sono tutti di colori differenti.

Secondo tale definizione risulta, ad esempio, che il non-nodo ed il nodo 6_2 non sono tricolorabili, mentre lo è il nodo trifoglio (vedi figura 2.13).

La definizione si riferisce in effetti ai diagrammi piani. Affinché sia ben posta è necessario mostrare l'invarianza per mosse di Reidemeister.

Applicando ad un diagramma Ω_1 si viene a formare (o a disfare) un autoincrocio, che necessariamente vede tutti e tre gli archi in questione dello stesso colore (vedi figura 2.14). Non varia dunque la tricolorabilità del nodo.

Ω_2 vede la creazione di due nuovi incroci e di un nuovo arco in comune ai due incroci. Se i due archi già presenti sono dello stesso colore α_i anche



Figura 2.13: Il non-nodo ed il nodo 6_2 sono tricolorabili mentre lo è il nodo trifoglio

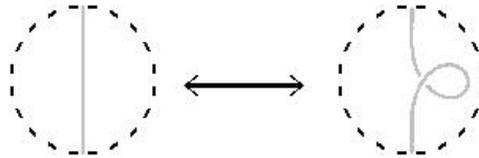


Figura 2.14: La tricolorabilità è invariante rispetto ad Ω_1

il nuovo arco risulterà colorato con α_i . Se invece i due archi hanno colore diverso basterà assegnare al nuovo arco il colore rimanente (vedi figura 2.15).

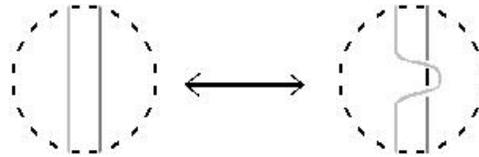


Figura 2.15: La tricolorabilità è invariante rispetto ad Ω_2

Mostrare l'invarianza rispetto ad Ω_3 è più laborioso, in quanto vi sono più possibilità da prendere in considerazione (due di questi sono presenti in figura 2.16).

2.3.1 Numero di tricolorabilità

L'essere o meno tricolorabile è dunque un invariante booleano. Da esso è però possibile ricavare una funzione con codominio più ampio.

Definizione 24 Dato un link L , preso un qualsiasi suo diagramma piano D , si definisce insieme delle 3-colorazioni $T(L)$ l'insieme delle colorazioni degli archi di D tali che ad ogni incrocio o tutti e tre gli archi siano dello stesso colore o siano di tre colori differenti.

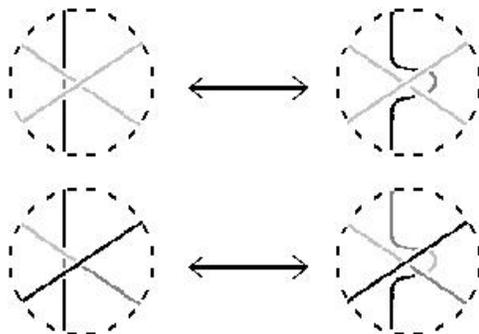


Figura 2.16: La tricolorabilità è invariante rispetto ad Ω_3

Si definisce numero di tricolorabilità $\tau(L)$ la cardinalità di $T(L)$.

Similmente a quanto visto per la tricolorabilità si dimostra che la definizione appena data è ben posta e che dunque τ è un invariante di link.

Esempi

- $\tau(\bigcirc) = 3$
- $\tau(\bigcirc \cup \bigcirc) = 9$
- $\tau(\bigcirc \bigcirc) = 9$
- $\tau(\bigcirc \cup \bigcirc) = 3$

Per la somma connessa tra due nodi vale il seguente risultato.

Teorema 4

$$\tau(K_1 \# K_2) = \frac{1}{3} \tau(K_1) \tau(K_2)$$

Si consideri l'insieme di tutte le possibili colorazioni $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$ degli archi A_i . Seguendo le regole di cui sopra ogni volta che tre archi A_i, A_j, A_k (non per forza distinti) formano un incrocio, allora la tripletta $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ sarà una tripletta della forma $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$ o una qualsiasi permutazione di $(0, 1, 2)$.

Ovvero le triplette $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) \in \{0, 1, 2\}^3$ soddisfano l'equazione

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \equiv 0 \pmod{3}$$

Si possono dunque pensare i colori come elementi del campo \mathbb{Z}_3 . Ha dunque senso riscrivere

$$T(L) = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_3^k : \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = 0 \right. \\ \left. \text{per ogni incrocio in cui appaiono gli archi } A_i, A_j, A_k \right\}$$

Dunque $T(L)$ è l'insieme delle soluzioni di c equazioni lineari omogenee in k incognite sul campo \mathbb{Z}_3 .

Teorema 5 $T(L)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{Z}_3 . Dunque $\tau(L) = 3^{\dim(T(L))}$ è una potenza di tre.

Dim.

Le soluzioni di equazioni lineari omogenee formano uno spazio vettoriale, ed il numero di elementi in uno spazio vettoriale su \mathbb{Z}_3 è dato da 3 elevato alla dimensione dello spazio.

Q.E.D.

2.3.2 p-colorabilità

Con opportune modifiche alle regole sulle colorazioni degli archi negli incroci è possibile estendere il concetto di 3-colorabilità e quello di numero di 3-colorazioni ad un qualsiasi numero $p \in \mathbb{N}$.

Generalmente si assume p primo. In tal modo i colori $0, 1, \dots, p-1$ possono essere pensati come elementi del campo \mathbb{Z}_p , il quale gode di proprietà non riscontrabili nel generico anello \mathbb{Z}_n .

Definizione 25 Sia p un numero primo ed L un link con diagramma piano D . Definiamo $T_p(L)$ l'insieme delle p -colorazioni, ossia con elementi in \mathbb{Z}_p , degli archi di D tali che sia verificata

$$2\alpha_i - \alpha_j - \alpha_k \equiv 0 \pmod{p}$$

ad ogni incrocio in cui A_i sia il l'arco relativo al ramo superiore ed A_j ed A_k gli archi relativi al ramo inferiore.

Per $p = 2$ le uniche colorazioni valide sarebbero quelle monocromatiche, mentre per $p = 3$ si riottiene la definizione di 3-colorabilità vista in precedenza (in \mathbb{Z}_3 si ha $[2] = [-1]$).

2.4 Polinomi

Una categoria molto potente di invarianti è quella dei polinomi. L'idea è quella di assegnare ad ogni classe di equivalenza di nodi un *polinomio di Laurent*, ovvero in cui le variabili compaiono con potenze sia con positive che negative.

Il primo che ebbe l'idea di associare a link e nodi un polinomio fu **J. Alexander** nel 1928. Per quasi 60 anni il *polinomio di Alexander* fu uno degli invarianti più potenti, nonché l'unico sotto forma di polinomio. Nel 1969 **John Conway** riuscì a riformulare il polinomio di Alexander in termini di *relazioni skein* (vedi figura 2.17), ovvero equazioni in cui compare il link in questione e link ottenuti operazioni di *flip* e *disincrocio* ad un particolare incrocio (vedi figura 2.18).

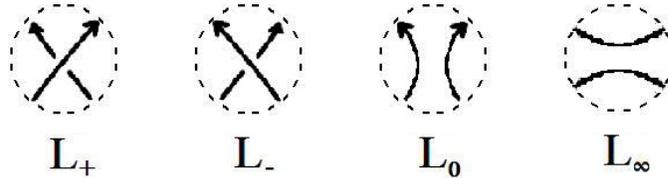


Figura 2.17: Una *relazione skein* è un'equazione del tipo $f(L_+, L_-, L_0, L_\infty) = 0$

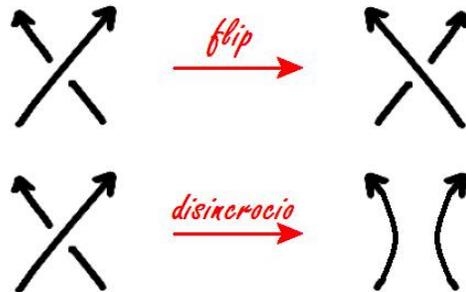


Figura 2.18: Operazioni di *flip* e *disincrocio*

Nel 1984, il matematico neozelandese **Vaughan Jones**, durante le sue ricerche sulle algebra degli operatori, scoprì un polinomio che riusciva ad adattarsi anche alla branca della teoria dei nodi, collegando così due aree della matematica fino a quel momento indipendenti tra loro.

I lavori di Jones diedero un nuovo slancio alla ricerca di invarianti tra gli studiosi del settore e pochi mesi dopo già si contavano nuovi polinomi,

tra cui il più potente era l'**HOMFLY** (dalle iniziali dei sei matematici che in quattro gruppi indipendenti lo scoprirono, ossia **H**oste, **O**cneanu, **M**illet, **F**reyd, **L**ickorish e **Y**etter). In effetti quest'ultimo polinomio altro non è che una generalizzazione in due variabili sia del polinomio di Jones che di quello di Alexander, e numerosi altri matematici arrivarono negli stessi mesi alla stessa scoperta (per dar merito ai due polacchi Przytycki e Traczyk che fecero la stessa scoperta indipendentemente e agli altri scopritori sconosciuti, o *unknown discoverers*, il matematico israeliano Dror Bar-Natan propose la sigla LYMPHOTU che però non entrò in uso). In questo paragrafo si studierà in particolare il polinomio di Jones. Invece dell'approccio originale sarà esposta la reinterpretazione data da **Louis Kauffman**. Per far ciò si introdurrà il **polinomio a bracket di Kauffman**. Questo non è un invariante di nodi, ma modificandolo leggermente permette di ottenere il risultato di Jones.

2.4.1 Bracket di Kauffman

Definizione 26 *Sia D un diagramma piano di un link non orientato. Definiamo il polinomio a bracket di Kauffman $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ tramite le seguenti regole:*

(0) $\langle D \rangle$ è un invariante per isotopie planari;

(1) $\langle \bigcirc \rangle = 1$;

(2) $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle$;

(3) $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$.

Dato un diagramma si potrà ottenere il relativo polinomio a bracket *semplificando* ad ogni passaggio il diagramma tramite opportuni disincroci o cancellazioni di componenti banali.

Dalla regola (2) è possibile ricavare, ruotando il diagramma piano di un angolo retto, la regola

(2') $\langle \searrow \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \nearrow \rangle$

2.4.2 Bracket di Kauffman e mosse di Reidemeister

La regola (1) ha come scopo di *normalizzare* il polinomio, mentre la scelta dei coefficienti nelle regole (2) e (3) non è casuale. Essa è necessaria affinché

$\langle D \rangle$ risulti invariante rispetto ad Ω_2 ed Ω_3 . Si supponga infatti di avere le seguenti regole:

$$(i) \langle \bigcirc \rangle = 1;$$

$$(ii) \langle \diagdown \rangle = \alpha \langle \rangle \langle \rangle + \beta \langle \diagup \rangle$$

$$(ii') \langle \diagup \rangle = \beta \langle \rangle \langle \rangle + \alpha \langle \diagdown \rangle$$

$$(iii) \langle D \cup \bigcirc \rangle = \gamma \langle D \rangle$$

Affinché si abbia l'invarianza rispetto ad Ω_2 deve essere verificata la seguente relazione

$$\begin{aligned} \langle \diagdown \rangle &= \alpha \langle \diagup \rangle + \beta \langle \diagdown \rangle \\ &= \alpha(\alpha \langle \diagdown \rangle + \beta \langle \diagup \rangle) + \beta(\alpha \langle \diagup \rangle + \beta \langle \diagdown \rangle) \\ &= \alpha(\alpha \langle \diagdown \rangle + \beta \gamma \langle \diagdown \rangle) + \beta(\alpha \langle \diagup \rangle + \beta \langle \diagdown \rangle) \\ &= (\alpha^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2) \langle \diagdown \rangle + \beta\alpha \langle \diagup \rangle = \langle \diagdown \rangle \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha^2 + \alpha\beta\gamma + \beta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \alpha^{-1} \\ \gamma = -\alpha^{-2} - \alpha^2 \end{cases}$$

Gli stessi risultati si ottengono considerando l'altro modo di applicare Ω_2 . Ponendo $A = \alpha$ si ritrovano i coefficienti delle regole (1) – (3).

Con tali coefficienti è verificata anche l'invarianza rispetto ad Ω_3 , infatti:

$$\begin{aligned} \langle \diagdown \diagup \rangle &= A \langle \diagup \rangle + A^{-1} \langle \diagdown \rangle \\ &= A \langle \diagup \rangle + A^{-1} \langle \diagdown \rangle \\ &= A \langle \diagup \rangle + A^{-1} \langle \diagdown \rangle = \langle \diagdown \diagup \rangle \end{aligned}$$

La dimostrazione per l'altro modo di applicare Ω_3 è equivalente.

Come già detto $\langle D \rangle$ non è un invariante per mosse di Reidemeister. Provando infatti a calcolare il polinomio a bracket prima e dopo l'applicazione di Ω_1 nei due modi possibili si ottiene

e

Dunque non solo Ω_1 non conserva il valore del polinomio ma fa variare il polinomio di $-A^3$ o di $-A^{-3}$ a seconda di come la si applichi.

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\sigma} \rangle &= A \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\
&= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\
&= -A^3 \langle \overline{\sigma} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\sigma} \rangle &= A \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\sigma} \rangle \\
&= A \langle \overline{\sigma} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \overline{\sigma} \rangle \\
&= -A^{-3} \langle \overline{\sigma} \rangle
\end{aligned}$$

2.4.3 Writhe

Si è visto che nonostante la scelta dei coefficienti sia sufficiente ad assicurare l'invarianza per la seconda e la terza mossa di Reidemaister, il variare a seguito di Ω_1 impedisce alle bracket di essere un invariante di nodi. Per ovviare a tale problema si introduce il concetto di *writhe* o *torsione* di un diagramma piano.

Definizione 27 Dato un diagramma piano D di un link non orientato si assegna ad ogni incrocio c il valore:

- $+1$ se il ramo superiore va dal basso a sinistra verso l'alto a destra;
- -1 se il ramo superiore va dal basso a destra verso l'alto a sinistra (vedi figura 2.19).

Si definisce writhe di D , e lo si indica con $\omega(D)$, la somma dei valori degli incroci, ovvero

$$\omega(D) = \sum_{c \text{ incrocio di } D} \omega(c)$$

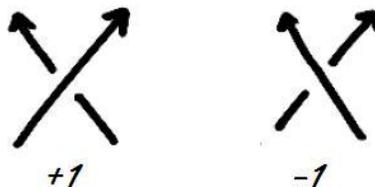


Figura 2.19: Valore da assegnare ad ogni singolo incrocio

La funzione $\omega(D)$ risulta invariante rispetto ad Ω_2 poiché applicando tale mossa si vengono a creare (o a disfare) due incroci di cui uno con peso $+1$ ed uno con peso -1 . La somma totale resterà dunque invariata (vedi

figura 2.20).

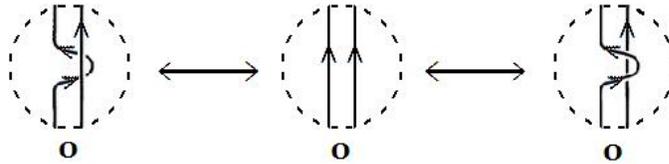


Figura 2.20: ω è invariante rispetto ad Ω_2

Anche facendo scivolare due incroci sopra (o sotto) un terzo incrocio applicando Ω_3 la torsione del diagramma non varia (vedi figura 2.21).

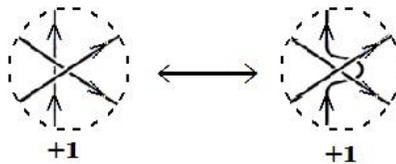


Figura 2.21: ω è invariante rispetto ad Ω_3

Applicando Ω_1 , invece, la funzione ω aumenta o diminuisce di 1 il proprio valore (vedi figura 2.22).

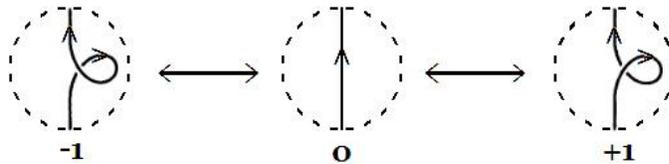


Figura 2.22: Ω_1 modifica di +1 o -1 il valore di ω

Tale proprietà della funzione ω servirà per definire il polinomio di Jones.

2.4.4 Il polinomio $X(L)$

Nel paragrafo precedente sono state introdotte le due funzioni $\langle \cdot \rangle$ e ω . Si prenderà adesso in considerazione una particolare combinazione delle due.

Definizione 28 Sia L un link non orientato e D un qualsiasi suo diagramma piano. Si definisce il polinomio $X(L)$ come:

$$X(L) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$$

Sia ω che $\langle \cdot \rangle$ sono invarianti per Ω_2 ed Ω_3 , quindi anche qualsiasi loro combinazione sarà invariante per queste due mosse. È inoltre verificata l'invarianza rispetto ad Ω_1 , infatti:

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-\omega(L')} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(\omega(L)+1)} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(\omega(L)+1)} ((-A)^3 \langle L \rangle) \\ &= (-A^3)^{-\omega(L)} \langle L \rangle = X(L) \end{aligned}$$


La definizione è dunque ben posta, ossia indipendente dalla scelta del diagramma piano.

Esempio (Link banale a due componenti)

- $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle \bigcirc \rangle = -A^{-2} - A^2$
- $\omega(\bigcirc \bigcirc) = 0$

Dunque si ha

$$X(\bigcirc \bigcirc) = (-A^3)^{-0} (-A^{-2} - A^2) = -A^{-2} - A^2$$

Esempio (Link di Hopf)

- $\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\ &= A (A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle) + A^{-1} (A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle) \\ &= A (A(-A^2 + A^{-2})) + A^{-1} (1) + A^{-1} (A(1) + A^{-1}(-A^2 + A^{-2})) \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$
- $\omega(\bigcirc \bigcirc) = 2$

Dunque si ha

$$X(\textcircled{1}) = (-A^3)^{-2}(-A^{-4} - A^4) = A^2 + A^{10}$$

2.4.5 Il polinomio $V(L)$

Partendo da $X(L)$, applicando la posizione $A = t^{-\frac{1}{4}}$, si ottiene il polinomio trovato da Jones $V(t)$ (dal nome Vaughan). Per definizione $V(t) \in \mathbb{Z} \left[t^{\pm\frac{1}{4}} \right]$ ma non è difficile dimostrare che esso appartiene in effetti a $\mathbb{Z} \left[t^{\pm\frac{1}{2}} \right]$ (ogni incrocio porta a dei link banali che, per la regola (3) fanno assumere ad ogni singolo fattore un coefficiente di A al quadrato).

Meno evidenti, ma ugualmente dimostrate, sono invece le seguenti proprietà del polinomio di Jones.

- $V(t) \in \mathbb{Z} [t^{\pm 1}]$ per i link con un numero dispari di componenti;
- $V_{L_1 \# L_2}(t) = V_{L_1}(t) \cdot V_{L_2}(t)$;
- $\forall K$ nodo si ha che $V_K(t)$ non dipende dall'orientamento (falso per i link);
- $\forall K$ nodo si ha che $V_{spec(K)}(t) = V_K(t^{-1})$.

L'ultima proprietà permette, guardando il valore assunto dal polinomio, di determinare la chiralità di un nodo. Infatti se K è achirale si avrà sicuramente $V_K(t)$ palindromo.

Il polinomio di Jones non è un invariante completo, ovvero è possibile trovare nodi non equivalenti tra loro a cui la funzione $V(t)$ assegna lo stesso polinomio. Sebbene nessuno sia riuscito ancora a dimostrarlo si suppone che $V_L(t) \neq 1$ per ogni link L diverso dal non-nodo.

2.4.6 Relazione skein di $V(L)$

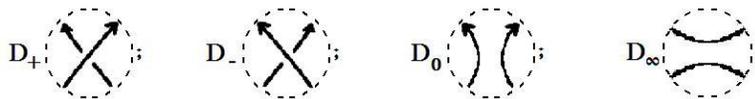
Il polinomio $V(L)$ verifica una particolare relazione skein, in particolare un'equazione in cui compaiono le quantità L_+ , L_- ed L_0 (vedi figura 2.17). Fu proprio questa relazione che Vaughan Jones usò per costruire originariamente il suo polinomio.

Teorema 6

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)V(L_0) = 0$$

Dim.

Poniamo:



Applicando le regole (2) e (2') si avrà:

$$\begin{cases} \langle D_+ \rangle = A \langle D_0 \rangle + A^{-1} \langle D_\infty \rangle \\ \langle D_- \rangle = A^{-1} \langle D_0 \rangle + A \langle D_\infty \rangle \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione a entrambi i membri per A e la seconda per A^{-1} si ottiene

$$\begin{cases} A \langle D_+ \rangle = A^2 \langle D_0 \rangle + \langle D_\infty \rangle \\ A^{-1} \langle D_- \rangle = A^{-2} \langle D_0 \rangle + \langle D_\infty \rangle \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ricava

$$A \langle D_+ \rangle - A^{-1} \langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle D_0 \rangle$$

Ma applicando la definizione di $X(L)$ si ha:

- $X(D_0) = \langle D_0 \rangle$
- $X(D_+) = (-A^3)^{-1} \langle D_+ \rangle \Rightarrow \langle D_+ \rangle = -A^3 X(D_+)$
- $X(D_-) = (-A^3)^1 \langle D_- \rangle \Rightarrow \langle D_- \rangle = -A^{-3} X(D_-)$

Sostituendo le quantità appena vista nell'equazione di cui sopra:

$$-A^4 X(D_+) + A^4 X(D_-) = (A^2 - A^{-2}) X(D_0)$$

che riscritta in termini di $V(t)$ diventa

$$t^{-1}V(D_+) - tV(D_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(D_0)$$

Q.E.D.

Esempio (Link di Hopf)

$$t^{-1}V(\text{link}) - tV(\text{link}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{Hopf link})$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} V(\text{link}) &= t^{-2}V(\text{link}) - t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{link}) = \\ &= -t^{-2}(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) - t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= -t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Esempio (Nodo trifoglio)

$$t^{-1}V(\text{link}) - tV(\text{link}) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{link})$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned} V(\text{link}) &= t^{-2} + t^{-1}(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}) = \\ &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \end{aligned}$$

Il polinomio ottenuto non è palindromo, dunque il nodo trifoglio è chirale, ossia è possibile distinguere due diversi nodi: il nodo trifoglio destro e il nodo trifoglio sinistro (vedi figura 2.23)

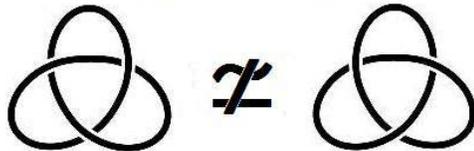


Figura 2.23: Il nodo trifoglio sinistro non è equivalente al nodo trifoglio destro

Capitolo 3

Gruppo fondamentale di un nodo

Applicando le conoscenze e gli strumenti della geometria algebrica si riesce a ricavare quello che è senza ombra di dubbio il più potente ed efficace invariante di un nodo o di un link.

3.1 Gruppo fondamentale e presentazione di un gruppo

Definizione 29 *Sia X uno spazio topologico ed $x_0 \in X$. Il gruppo fondamentale di X con punto base x_0 , in simboli $\pi(X, x_0)$, è il gruppo che ha come elementi le classi di equivalenza degli archi chiusi di base x_0 rispetto alla relazione di equivalenza d'omotopia relativa a $\{0, 1\}$ e come operazione il prodotto tra tali classi definito da $[f * g] = [f] * [g]$.*

Il concetto di gruppo fondamentale si rivela molto utile anche in teoria dei nodi.

Una maniera notevole per rappresentare un gruppo è tramite una sua *presentazione*.

Definizione 30 *Sia $S = \{a, b, c, \dots\}$ un insieme di simboli e denotiamo con \bar{S} l'insieme $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$. Si definisce insieme delle parole in S , e lo si denota con $W(S)$ l'insieme di tutte le stringhe finite di simboli in $S \cup \bar{S}$, compreso l'insieme vuoto \emptyset . Se $w_1, w_2 \in W(S)$ è possibile considerare concatenare le due parole in maniera naturale formando la nuova parola $w_1 w_2$. Data la parola w indichiamo con \bar{w} la parola scritta al contrario.*

Dato un insieme di *generatori* S ed un insieme di *relazioni* $R \subset W(S)$ è possibile definire un gruppo G come segue.

G ha come elementi quelli dell'insieme $W(S)/\sim$, dove \sim è la relazione di equivalenza definita da $w \sim w'$ se e solo se vi è una sequenza finita di parole $w = w_0, w_1, \dots, w_n = w'$ tali che ognuna è ottenibile dalla precedente tramite una delle due seguenti operazioni:

1. CANCELLAZIONE: $w_1 a \bar{a} w_2 \leftrightarrow w_1 w_2 \leftrightarrow w_1 \bar{a} a w_2 \quad \forall w_1, w_2 \in W(S)$ e $a \in S$;
2. RELAZIONE: $w_1 r w_2 \leftrightarrow w_1 w_2 \quad \forall w_1, w_2 \in W(S)$ e $r \in R$.

La classe di equivalenza per \sim della parola w sarà indicata con $[w]$.

Su G si definisce l'operazione di concatenazione come: $[w_1][w_2] = [w_1 w_2]$. L'elemento neutro $[1]$ sarà l'insieme vuoto \emptyset e dato un elemento $[w]$ il suo inverso sarà $[\bar{w}]$.

Sotto tali ipotesi si dirà che G ha *presentazione* $\langle S : R \rangle$.

Di seguito si considereranno solo casi in cui sia S che R sono insiemi finiti. Sotto tali restrizioni G sarà detto *finitamente presentato*.

3.2 Gruppo fondamentale di un nodo

Definizione 31 *Sia K un nodo in \mathbb{R}^3 . Sia X il complementare di K , ovvero $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$. Si definisce gruppo fondamentale del nodo K , e lo si indica con $\pi(K)$, il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$ con $x_0 \in X$.*

Essendo X connesso per archi il gruppo fondamentale non dipende dalla scelta del punto base e dunque la definizione è ben posta.

È anche possibile pensare il nodo come giacente nello spazio S^3 , ovvero la 3-sfera ottenuta da \mathbb{R}^3 unito al punto all'infinito. Per quanto definito finora la scelta tra le due definizioni è indifferente in quanto le deformazioni sui nodi studiate sono tutte al finito. Un'altra possibilità è quella di definire X non solo togliendo allo spazio universo il nodo ma tutto un ε -intorno di K , che risulta omeomorfo ad un toro solido. Se si applicano entrambe le definizioni alternative descritte si ottiene un complemento compatto con bordo, che in determinati casi risulta più facile da studiare. Tali scelte non sono però decisive in quanto il gruppo fondamentale resta invariato.

Per quanto definito nel capitolo 1 due nodi equivalenti sono collegati tra loro attraverso una successione di Δ -mosse. Applicando una qualsiasi Δ -mossa il complemento di un nodo resta omotopicamente invariato. Nodi equivalenti hanno perciò complementi omeomorfi e dunque gruppi isomorfi.

Teorema 7 *Il gruppo di un nodo (o meglio il gruppo a meno di isomorfismi) è un invariante di nodi.*

Si ha quindi che "i nodi determinano i complementi". Risultato ancor più sorprendente è il viceversa, ossia che "i nodi sono determinati dai loro complementi". Tale risultato fu dimostrato nel 1987 da **Gordon** e **Luecke** sebbene congetturato già molto tempo prima da diversi matematici. Più precisamente vale il seguente risultato.

Teorema 8 (di Gordon e Luecke) *Se due nodi non orientati hanno complemento omeomorfo allora sono equivalenti a meno della specularità (tale ambiguità può essere tolta assumendo come ipotesi che l'omeomorfismo conservi l'orientazione).*

Non esiste invece un teorema analogo per i link. In generale anzi il risultato sopra visto è falso per link a più di una componente.

Altro risultato notevole è quello dimostrato da **Whitten**.

Teorema 9 (di Whitten) *Se K e K' sono due nodi primi con gruppi isomorfi allora i complementi dei due nodi sono omeomorfi. Dunque, per Gordon-Luecke, $K \simeq K'$ (a meno della specularità).*

Dunque almeno per i nodi primi (il risultato è falso per i nodi composti) si può affermare che "il gruppo è determinato dal nodo", ovvero limitatamente ai nodi primi il gruppo di un nodo è un invariante completo.

3.3 Presentazione di Wirtinger

Vi è una semplice procedura, dovuta a **Wirtinger**, per ottenere una presentazione di un gruppo di un nodo.

Teorema 10 (di Wirtinger) *Sia K un nodo e D un qualsiasi suo diagramma piano. Indichiamo con a_1, a_2, \dots, a_c gli archi di D e con r_i per $i = 1, 2, \dots, c$ le parole $r_i = y^{-n}xy^n z^{-1}$ dove y è l'arco relativo al ramo*

superiore, x, z i due archi relativi il ramo inferiore ed $\eta = +1$ o -1 rispettivamente se y va dal basso a sinistra verso l'alto a destra o dal basso a destra verso l'alto a sinistra (vedi figura 3.1). Una presentazione di K è data da:

$$\pi(K) = \langle a_1, a_2, \dots, a_c : r_1, r_2, \dots, r_c \rangle$$

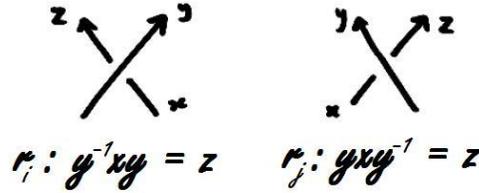


Figura 3.1: Relazioni da assegnare ad ogni incrocio per ottenere la presentazione di Wirtinger

La dimostrazione di tale teorema sfrutta il teorema di Seifert-van Kampen, un risultato che permette di ricavare il gruppo fondamentale di uno spazio topologico conoscendo i gruppi fondamentali di suoi particolari sottospazi.

Di seguito è esposta l'idea della dimostrazione della validità delle relazioni r_i (il fatto che tali relazioni siano sufficienti a determinare la presentazione è più complicato).

Per ogni arco a_i del diagramma si consideri un cammino chiuso attorno all'arco che, per comodità di scrittura, denotiamo anch'esso con a_i . Si considererà positivo il verso del cammino se posizionandosi col corpo sull'arco a_i in modo che questo passi dalla testa ai piedi si vedrà guardando verso il basso il cammino con orientazione antioraria (vedi figura 3.2).

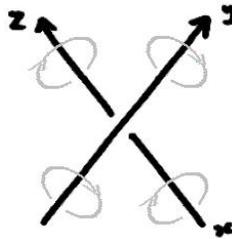


Figura 3.2: Cammini attorno agli archi del formanti un incrocio

Per tali cammini non è stato definito un punto base. Lo si fissi scegliendo un $x_0 \in X$. Si consideri ora il cammino $xyz^{-1}y^{-1}$ (vedi figura 3.3).

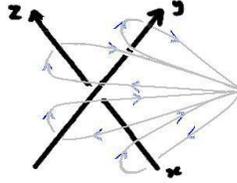


Figura 3.3: Cammino chiuso $xyz^{-1}y^{-1}$

Come facilmente intuibile dalla figura 3.4, è possibile applicando opportunamente omotopie e mosse Ω_2 e Ω_3 ridurre il cammino $xyz^{-1}y^{-1}$ ad una circonferenza e dunque, in termini di classi di equivalenza di omotopie, a ε , l'elemento neutro di $\pi(K)$.

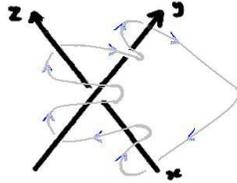


Figura 3.4: Equivalente del cammino chiuso $xyz^{-1}y^{-1}$

Si ha la seguente catena di equazioni

$$xyz^{-1}y^{-1} = \varepsilon \Rightarrow xyz^{-1} = y \Rightarrow y^{-1}xyz^{-1} = \varepsilon$$

Ovvero esattamente la relazione definita nel teorema.

Esempio

Si consideri il nodo trifoglio rappresentato in figura 3.5.

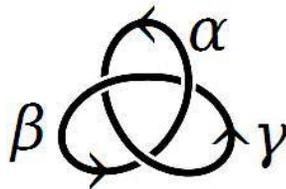


Figura 3.5: Nodo trifoglio orientato con archi etichettati

L'insieme dei generatori è dato da $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ mentre le relazioni (vedi figura 3.6) sono rispettivamente:

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta^{-1} \quad \beta^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1} \quad \gamma^{-1}\beta\gamma\alpha^{-1}$$

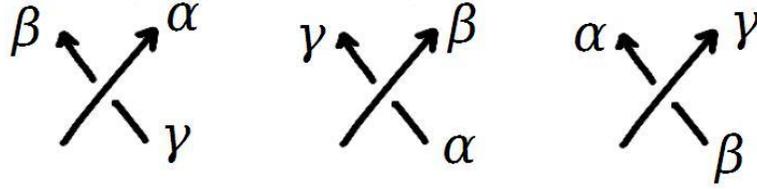


Figura 3.6: Incroci del nodo trifoglio di figura 3.5

Si osserva che la terza relazione è ottenibile dalle altre due, infatti $\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma$ e $\beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha$, da cui si ottiene:

$$\beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha = \alpha^{-1}\gamma(\gamma^{-1}\beta\gamma) = \alpha^{-1}\beta\gamma$$

da cui si ottiene che $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$.

Dunque è possibile ottenere una presentazione del gruppo del nodo trifoglio come segue:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha &= \gamma^{-1}\beta\gamma, \beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha, \gamma = \beta^{-1}\alpha\beta \rangle \cong \\ &\cong \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma, \beta = \alpha^{-1}\gamma\alpha \rangle \cong \\ &\cong \langle \beta, \gamma : \beta = (\gamma^{-1}\beta^{-1}\gamma)\gamma(\gamma^{-1}\beta\gamma) \rangle \cong \\ &\cong \langle \beta, \gamma : \beta\gamma\beta = \gamma\beta\gamma \rangle \end{aligned}$$

e quest'ultima presentazione a sua volta è possibile scriverla come

$$\langle a, b : a^2 = b^3 \rangle$$

Sebbene il gruppo di un nodo sia uno degli invarianti più potenti (si è detto che è completo per i nodi primi) nella pratica è poco usato. Ciò è dovuto al fatto che verificare l'isomorfismo tra due diverse presentazioni risulta essere un problema altrettanto complicato (se non di più) rispetto al problema di rinascimento di due nodi.

Capitolo 4

Grafi

Un'area della matematica, all'apparenza scollegata con la teoria dei nodi ma che offre molte connessioni e spunti di studio è la teoria dei grafi.

Definizione 32 *Un grafo G è una coppia dei due insiemi (V, E) con $E \subset \{L \in 2^V : |L| \leq 2\}$. Gli elementi di V sono detti vertici, mentre quelli di E lati.*

È possibile rappresentare un grafo mediante dei punti, i vertici, e delle linee colleganti tali punti, i lati. Sono in generale possibili differenti maniere di rappresentare un grafo nello spazio. Si chiamerà *immersione* una scelta di come posizionare vertici e lati in \mathbb{R}^3 .

Una classe importante di grafi è rappresentata dai *grafi planari*

Definizione 33 *Un grafo G è detto planare se è possiede un'immersione giacente interamente in un piano.*

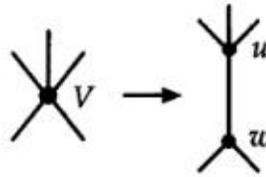
Detto in altri termini un grafo è planare se è possibile disegnarlo in un piano senza far incrociare tra loro i lati.

Definizione 34 *Un grafo G è detto etichettato se, posto A un insieme, ad ogni lato si associa un elemento di A . In particolare si definisce un grafo con segno se ad ogni lato si associa un elemento dell'insieme $\{+, -\}$.*

Si considerano ora due particolari operazioni applicabili sui grafi.

Definizione 35 *Dato un grafo $G = (V, E)$ diremo che $G' = (V', E')$ è ottenuto da G tramite espansione del vertice $v \in V$ se*

- $V' = (V \setminus \{v\}) \cup \{u, w\}$ con $u, w \notin V$
- $\{x, v\} \in E \Leftrightarrow \{x, u\} \in E'$ aut $\{x, w\} \in E'$
- $E \setminus \{\{x, v\} : x \in V\} = E' \setminus \left(\{\{x, u\} : x \in V'\} \cup \{\{x, w\} : x \in V'\} \right)$
(vedi figura 4).



Definizione 36 Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Si dirà che G e G' sono collegati tramite uno scambio $\Delta - Y$ se $\exists u, v, w \in V$ distinti e $z \notin V$ tali che

- $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\} \in E$
- $\{u, z\}, \{v, z\}, \{w, z\} \in E'$
- $\{x, z\} \notin E' \quad \forall x \notin \{u, v, w, z\}$ (vedi figura 4).



Altre definizioni utili sono quelle di cammini e cicli di un grafo.

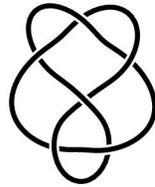
Definizione 37 Dato un grafo G si definirà cammino una sequenza di lati consecutivi (ossia con in comune un vertice). Un cammino con estremo iniziale coincidente con estremo finale sarà detto ciclo. Un ciclo che tocca ogni vertice del grafo una ed una sola volta (il vertice di partenza e arrivo sarà contato una sola volta) sarà detto ciclo Hamiltoniano.

4.1 Grafi e diagrammi piani

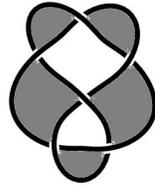
Di seguito è esposto un algoritmo che permette la creazione di una biezione tra l'insieme dei diagrammi piani non orientati e quello dei grafi planari con segno.

4.1.1 Dal diagramma al grafo

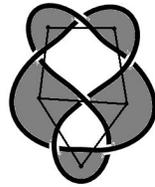
Si consideri un diagramma piano di un nodo, come mostrato in figura



Tale diagramma dividerà il piano in più regioni. Si inscuriscano le regioni del piano in modo che due regioni confinanti (con un arco o con parte di esso) abbiano colore differente facendo in modo che la regione esterna risulti non colorata.



Si scelga un vertice all'interno di ogni regione inscurita e si colleghino tra loro i vertici se e solo se le regioni corrispondenti hanno incroci in comune.

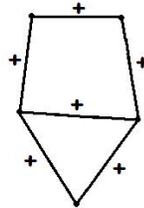


Infine si assegni ad ogni lato del grafo l'etichetta $+$ se attraversando l'incrocio sul ramo superiore si lascia la regione scura alla propria destra, e $-$ se invece la si lascia alla propria sinistra (vedi figura 4.1).



Figura 4.1: Regola di assegnazione del segno per i lati del grafo corrispondenti agli incroci del diagramma

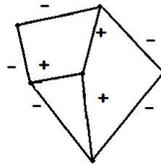
Il grafo così ottenuto sarà univocamente determinato a meno di isotopie planari del diagramma.



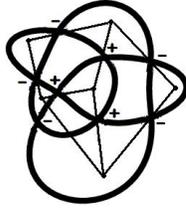
4.1.2 Dal grafo al diagramma

Così come si è ricavato da un diagramma piano un grafo planare con segno, è possibile costruire un algoritmo inverso come segue.

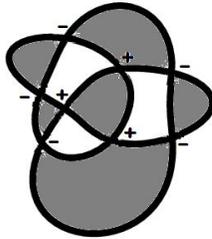
Si parta considerando un grafo planare con segno.



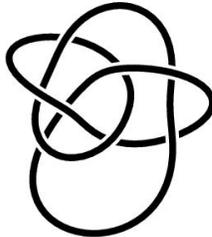
Si disegnano per ogni lato del grafo un incrocio e si colleghino questi tra loro se e solo se i due lati in questione sono consecutivi.



Si colorino dunque le regioni contenenti i vertici.



Infine si distinguono per ogni incrocio rami inferiori e rami superiori seguendo la convenzione già mostrata in figura 4.1.



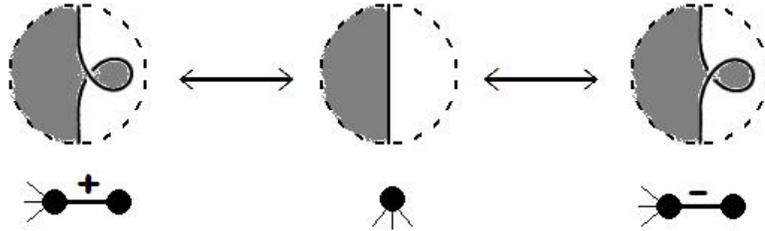
4.1.3 Grafi e mosse di Reidemeister

Come già mostrato nei capitoli precedenti uno stesso nodo può essere rappresentato da diversi diagrammi piani. Si è inoltre mostrato che se D e D' sono entrambi diagrammi piani di K allora è possibile passare da D a D' tramite una successione di isotopie planari e di mosse di Reidemeister.

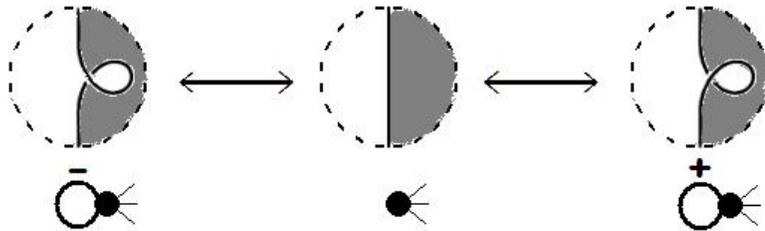
Ω_0 non modifica il grafo, dunque ci si limiterà a mostrare gli effetti delle tre mosse Ω_i per $i = 1, 2, 3$.

Applicando Ω_1 si viene a creare (o a disfare) un nuovo incrocio ed una nuova regione. Se questa è colorata nel grafo corrispondente si verrà a

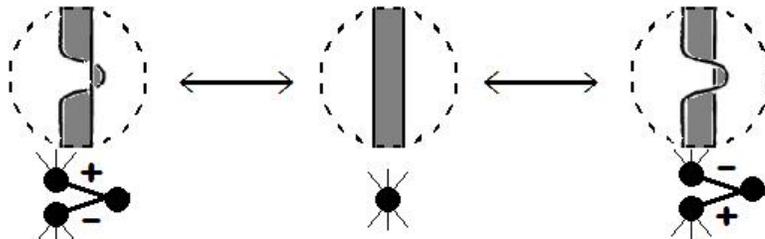
creare (o a cancellare) un nuovo vertice con un unico lato, con segno $+$ o $-$ a seconda del modo in cui si è applicata la mossa.



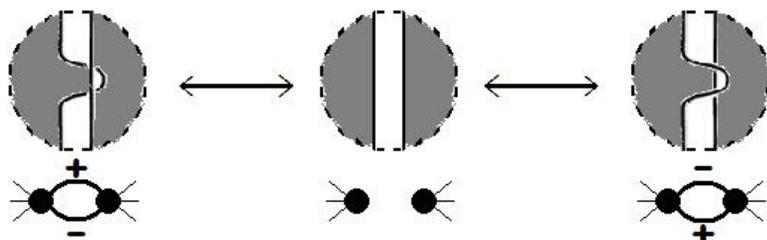
Se invece la regione è bianca, l'effetto nel grafo sarà la creazione (o la cancellazione) di un *cappio*, ovvero di un lato del tipo $\{v, v\}$ con $v \in V$. Anche qui l'etichetta del lato dipenderà dal modo in cui si applica la mossa.



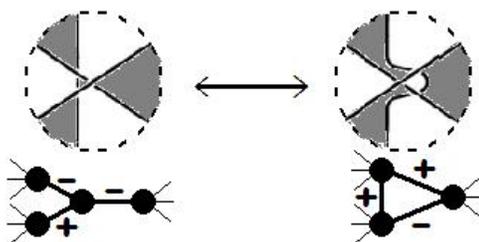
Anche nello studio degli effetti di Ω_2 bisogna distinguere due casi a seconda di come risultino colorate le regioni. Se la regione oscurata è quella centrale si avrà un'espansione del vertice relativo a questa regione e la creazione di un nuovo vertice collegato ai due vertici espansi, uno con etichetta $+$ e l'altro con etichetta $-$ come mostrato in figura.



Se le regioni oscurate sono quelle esterne si assisterà invece alla creazione di una nuova regione bianca e di due nuovi incroci e, relativamente al grafo, alla nascita di due nuovi lati, uno etichettato $+$ e l'altro $-$ tra i due vertici già esistenti (vedi figura).



Con Ω_3 invece vi sono più casi da prendere in considerazione (uno di questi è mostrato nella figura seguente). In tutti i casi il grafo corrispondente subirà uno scambio $\Delta - Y$.



4.2 Grafi intrinsecamente concatenati e intrinsecamente annodati

4.2.1 Grafi intrinsecamente concatenati

Si è già visto che ogni grafo possiede più *immersioni* in \mathbb{R}^3 differenti tra loro. Ad esempio in figura 4.2 sono presenti tre diverse immersioni del grafo completo a sei vertici K_6 (un grafo è detto *completo* quando ogni vertice è collegato una ed una sola volta ad ogni altro vertice).

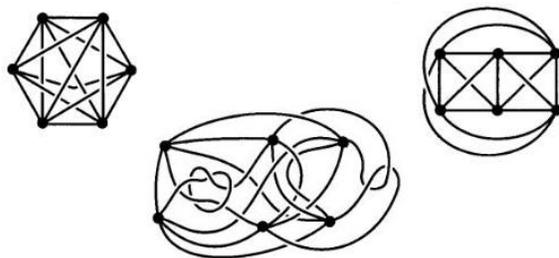


Figura 4.2: Alcune immersioni in \mathbb{R}^3 del grafo completo K_6

Definizione 38 Si definisce triangolo in un'immersione di K_6 un qualsiasi insieme di tre lati consecutivi tali da formare un triangolo nel grafo. Si osservi che fissata tre vertici distinti è possibile formare un triangolo scegliendo i lati che li collegano (il grafo è completo). Inoltre è possibile formare un secondo triangolo disgiunto usando i tre vertici rimanenti (vedi figura 4.3).

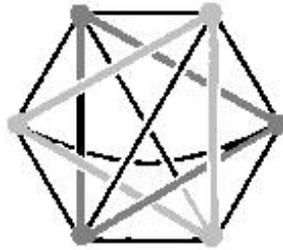


Figura 4.3: Esempio di due triangoli disgiunti in un'immersione di K_6

Si possono pensare i due triangoli definiti sopra come formanti un link a due componenti. Se il link così formato risulta banale si dirà che i due triangoli sono *non concatenati*. Nel caso opposto invece si diranno *concatenati* (vedi figura 4.4).



Figura 4.4: Esempi di triangoli non concatenati (a sinistra) e concatenati (a destra)

Nel 1983 **John H. Conway** e **Cameron Gordon** pubblicarono un articolo dal titolo *Knots and Link in Spatial Graphs* nel quale dimostrarono il seguente risultato.

Teorema 11 *Ogni immersione di K_6 contiene almeno una coppia di triangoli concatenati.*

K_6 non è però l'unico grafo a godere di tale proprietà. Diamo di seguito una definizione più generale.

Definizione 39 *Un grafo è detto intrinsecamente concatenato se qualsiasi sua immersione in \mathbb{R}^3 contiene link non banali.*

Oltre al già visto K_6 è possibile dimostrare che anche $K_{3,3,1}$ è intrinsecamente concatenato (vedi figura 4.5).

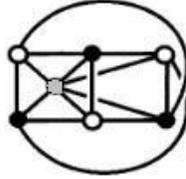


Figura 4.5: Il grafo $K_{3,3,1}$ è intrinsecamente concatenato

Nel 1993 **Neil Robertson**, **P.D. Seymour** e **Robin Thomas** dimostrarono che un grafo è intrinsecamente concatenato se e solo se contiene come sottografo il *grafo di Petersen* (vedi figura 4.6) o una sua espansione. A sua volta è possibile pensare il grafo di Petersen come ottenuto da K_6 tramite opportuni scambi $\Delta - Y$.

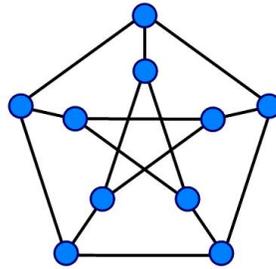


Figura 4.6: Grafo di Petersen

4.2.2 Grafi intrinsecamente annodati

Un concetto collegato a quello di concatenamento intrinseco è quello di *annodamento intrinseco* di un grafo.

Sempre nel loro articolo del 1983, Conway e Gordon dimostrarono il seguente teorema.

Teorema 12 *Ogni immersione di K_7 contiene almeno un ciclo Hamiltoniano equivalente a un nodo non banale.*

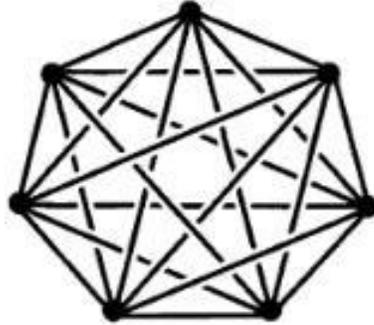


Figura 4.7: Immersione in \mathbb{R}^3 di K_7

Definizione 40 *Un grafo G è detto intrinsecamente annodato se qualsiasi sua immersione in \mathbb{R}^3 contiene un ciclo (non per forza Hamiltoniano) annodato in maniera non banale.*

Come già visto K_7 è intrinsecamente annodato.

Nel 1988 **Miki Shimabara** mostrò che anche $K_{5,5}$ gode della stessa proprietà.

Fin'ora i grafi contenenti come sottografo K_7 o $K_{5,5}$ sono gli unici che si conoscono essere intrinsecamente annodati.

Le due proprietà di concatenamento intrinseco e annodamento intrinseco sono relazionate dal seguente teorema.

Teorema 13 *G intrinsecamente annodato $\Rightarrow G$ intrinsecamente concatenato.*

Capitolo 5

Trecce

I matematici cominciarono ad interessarsi alle trecce all'incirca negli stessi anni che dei nodi. Per lungo tempo questi due diversi oggetti geometrici vennero studiati separatamente. Fu solo nel 1923 che **James Waddell Alexander** gettò un ponte tra le due teorie dimostrando che ogni nodo poteva essere descritto tramite una treccia.

Definizione 41 *Si considerino due linee parallele, una superiore ed una inferiore, e su ognuna di questi m punti distinti. Si definisce treccia di m componenti (o m -treccia) un insieme di m curve disgiunte dette corde, in cui ciascun elemento ha estremo iniziale nella linea superiore, estremo finale nella linea inferiore ed è tale da intersecare una ed una sola volta ciascun piano parallelo compreso tra le due linee. (vedi figura 5.1)*



Figura 5.1: Esempio di 3-treccia

Similmente a quanto fatto per i nodi si considera una relazione di equivalenza tra le varie trecce. Si dirà due trecce sono *equivalenti* se è possibile

risistemare le corde della prima treccia in modo da farla apparire uguale alla seconda tenendo fissate la linea superiore e quella inferiore e con esse gli estremi delle corde. Inoltre si eviterà che le corde passino al di sopra della linea superiore ed al di sotto di quella inferiore. Formalmente si avrà:

Definizione 42 *Due trecce sono equivalenti se vi è un'omotopia relativa agli estremi delle corde tra la prima e la seconda.*

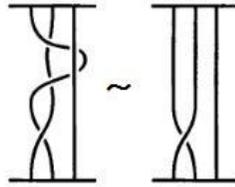


Figura 5.2: Esempio di trecce equivalenti

5.1 Il gruppo B_n

Si consideri l'insieme di tutte le m -trecce, B_m . Su tale insieme è possibile definire una struttura algebrica. Per far ciò si inizia col definire un'operazione tra trecce.

Definizione 43 *Siano $\alpha, \beta \in B_m$. Si definisce $\alpha \cdot \beta$ la m -treccia ottenuta sovrapponendo la linea inferiore di α con la linea superiore di β ed unendo la parte superiore della prima treccia con la parte inferiore della seconda (vedi figura 5.3).*

In B_m è anche presente una treccia, che indichiamo con e_m , che funge da elemento neutro per l'operazione sopra descritta. Questa è semplicemente la m -stringa formata da m corde parallele tra loro (vedi figura 5.4).

Si vede facilmente che tale operazione è associativa, ovvero che

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in B_m$$

Mentre in generale non è verificata la commutatività, ossia

$$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$$

Teorema 14 (di Artin) B_m è un gruppo commutativo.

Tale struttura di gruppo risulta utile nel determinare numerose proprietà di tali particolari oggetti geometrici.

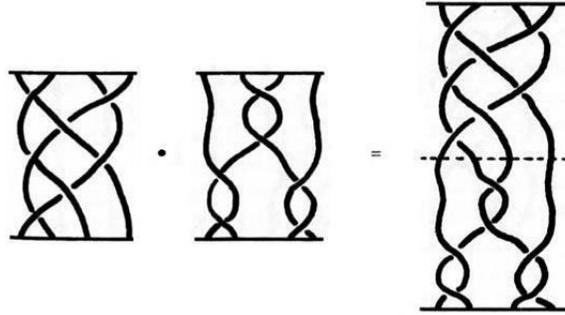
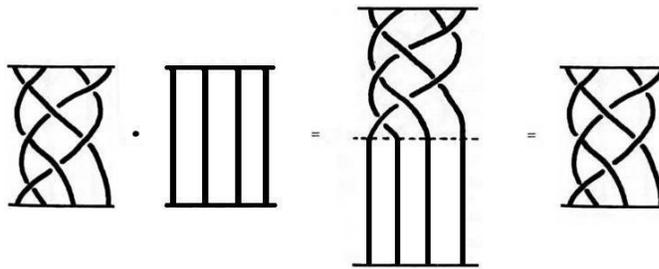


Figura 5.3: Moltiplicazione tra due 4-trecce

Figura 5.4: Moltiplicazione di una 4-treccia per e_4

5.1.1 Treccie elementari

Il gruppo B_m ha cardinalità infinita. Di seguito si considereranno delle particolari trecce utili per descrivere qualsiasi elemento del gruppo delle m -trecce.

In particolare descriveremo una proiezione di una treccia elencando i vari incroci che le corde formano tra loro. Per prima cosa si risistemano le corde in modo che ad ogni altezza vi sia al più un incrocio.

Definizione 44 Si definisce m -treccia elementare un elemento di B_m nella cui proiezione compare un solo incrocio. Se l'incrocio in questione è formato dall' i -ma e dall' $i + 1$ -ma corda la treccia sarà chiamata rispettivamente σ_i o σ_i^{-1} a seconda che il ramo superiore sia dall'alto a sinistra verso basso a destra o dall'alto a destra verso basso a sinistra (vedi figura 5.5).

Ogni proiezione di una treccia è rappresentabile come prodotto di trecce elementari, ovvero ad ogni elemento di B_m è possibile associare una parola

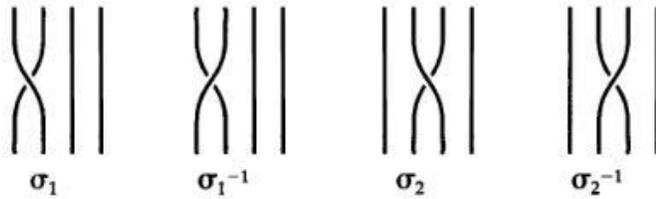


Figura 5.5: Esempi di 4-trecce elementari

con lettere nell'alfabeto $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{m-1}^{\pm 1}\}$. Un esempio è mostrato in figura ??.

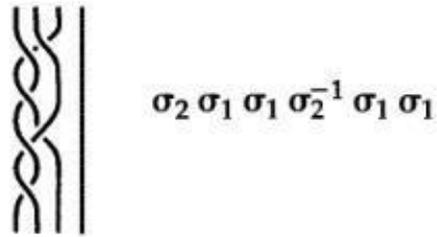


Figura 5.6: Esempio di rappresentazione di una proiezione tramite trecce elementari

Come si è visto una stessa treccia può essere rappresentata tramite diverse proiezioni. Dunque più parole potrebbero descrivere lo stesso elemento di B_m .

In teoria dei nodi il risultato di Reidemeister ci assicurava che due diagrammi rappresentavano lo stesso nodo se e solo se collegati da una successione di mosse del tipo Ω_i con $i = 1, 2, 3$. Anche in teoria delle trecce è possibile raggiungere un risultato simile. Elenchiamo di seguito alcune proprietà di B_m .

La prima proprietà è banalmente valida per tutte le strutture di gruppo.

Teorema 15 (Moltiplicazione per l'inverso)

$$(i) \quad \sigma_i \sigma_i^{-1} = e_m = \sigma_i^{-1} \sigma_i \quad \forall 1 \leq i \leq m-1 \quad (\text{vedi figura 5.7}).$$

Tale proprietà è l'equivalente della mossa Ω_2 nello studio dei diagrammi piani.

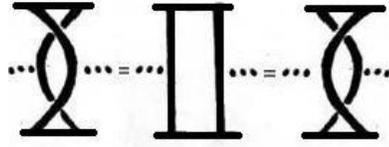


Figura 5.7: Moltiplicazione per l'inverso

Teorema 16 (Commutatività lontana)

(i) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ se $|i - j| > 1$ (vedi figura 5.8).

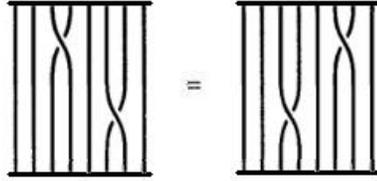


Figura 5.8: Commutatività lontana

Teorema 17 (Relazione di Artin)

(i) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (vedi figura 5.9).

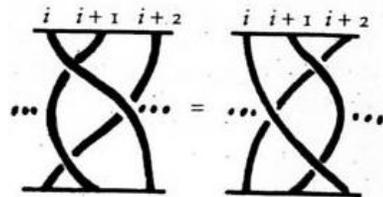


Figura 5.9: Relazione di Artin

Da quest'ultima proprietà è possibile ricavare l'equivalente della mossa Ω_3 .

Teorema 18

$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ vedi figura 5.10

Dim.

Applicando le regole (i) e (iii) e l'associatività di B_m si hanno le seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}
 \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} &= (\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1}) \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \\
 &= \sigma_{i+1}^{-1} (\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) \sigma_i^{-1} \\
 &= \sigma_{i+1}^{-1} (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) \sigma_i^{-1} \\
 &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} (\sigma_i \sigma_i^{-1}) \\
 &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

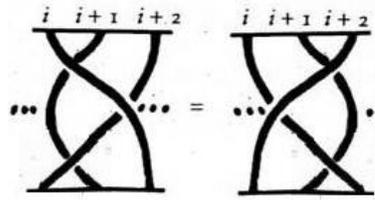


Figura 5.10: Corrispondente della mossa Ω_3 per le trecce

Con gli stessi passaggi del teorema precedente si può dimostrare anche

$$\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}$$

ovvero la proprietà corrispondente all'altro modo di applicare Ω_3 .

5.2 Chiusura di una treccia

A partire da una treccia è sempre possibile ottenere un nodo o un link tramite l'operazione di *chiusura*

Definizione 45 *Data una treccia α , si definisce chiusura di α il link che si ottiene unendo ordinatamente gli m estremi iniziali delle corde con gli m estremi finali senza formare nuovi incroci (vedi figura 5.11).*

Dunque ogni chiusura di una treccia rappresenta un link. Sorprendentemente vale anche l'inverso.

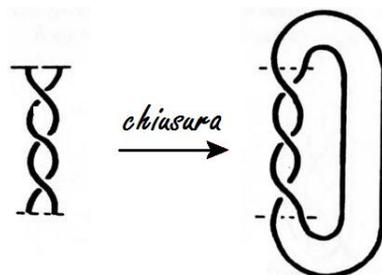


Figura 5.11: Chiusura di una treccia

5.2.1 Teorema di Alexander

Teorema 19 (di Alexander) *Ogni link è ottenibile dalla chiusura di un'opportuna treccia.*

Di seguito è esposta un'idea informale della dimostrazione.

Nel caso in cui il nodo risulta *arrotolato*, ossia si avvolge sempre nello stesso verso attorno a un punto dato, per ottenere la treccia è sufficiente tagliare il nodo lungo una semiretta che parte dal *centro di arrotolamento* e quindi srotolarlo (vedi figura 5.12).

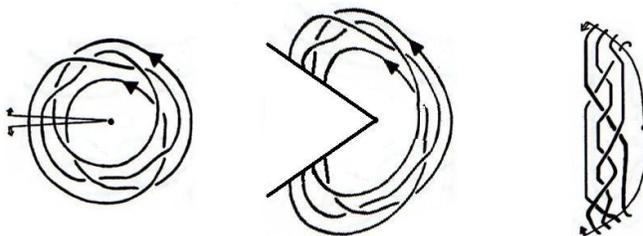


Figura 5.12: Srotolamento in una treccia di un nodo arrotolato

Nel caso generale si cercherà di riportarsi alla situazione precedente, arrotolando il nodo tramite vari metodi. Nell'esempio del nodo a otto di figura 5.13 basterà far passare l'arco in neretto al di sopra del centro di arrotolamento portandolo dall'altra parte della curva.

5.2.2 L'algoritmo di Vogel

Il metodo descritto da Alexander ha come difetto la sua scarsa efficacia dal punto di vista pratico: non è affatto facile, ad esempio, insegnare ad un computer ad effettuare arrotolamento e srotolamento di un qualsiasi nodo.

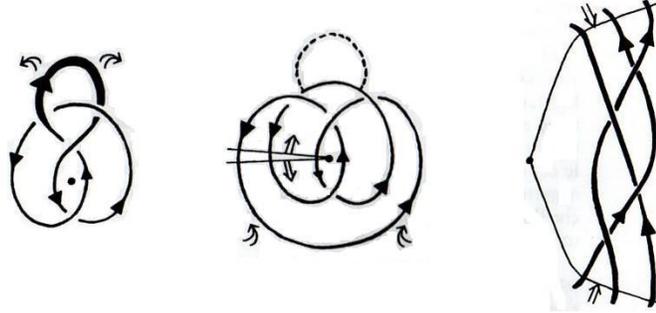


Figura 5.13: Arrotolamento e srotolamento int reccia del nodo a otto

Nel 1990 **Pierre Vogel** pubblicò un algoritmo che permetteva di tradurre in termini di trecce un qualsiasi diagramma piano di un nodo.

L'algoritmo del matematico francese sfrutta tre particolari operazioni effettuabili con un diagramma piano. Analizziamole una per volta:

- RISOLUZIONE PER CERCHI DI SEIFERT

Si è già descritta nel capitolo 2 l'operazione di *disincrocio* (mostrata anche in figura 5.14).

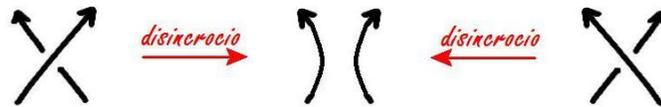


Figura 5.14: Operazione di disincrocio applicata nei due modi possibili

Si dirà che un diagramma è *risolto* se ad ogni suo incrocio è stato applicata coerentemente l'applicazione di disincrocio. Le curve chiuse orientate così ottenute (senza incroci) sono dette *cerchi di Seifert*.

Definizione 46 Due cerchi di Seifert si diranno incastonati se uno dei due è all'interno dell'altroe se i loro orientamenti sono concordi.

Tali cerchi possono risultare tutti incastonati tra loro (vedi figura 5.15), oppure no (vedi figura 5.16).

- CAMBIAMENTO D'INFINITO

L'operazione di *cambiamento di infinito* consiste in una particolare inversione che manda un punto di un cerchio non incastonato all'infinito.



Figura 5.15: Risoluzione per cerchi di Seifert del nodo trifoglio



Figura 5.16: Risoluzione per cerchi di Seifert del link di Whitehead

Tramite tale operazione è possibile rendere incastonati due cerchi di Seifert che prima non lo erano (vedi figura 5.17).



Figura 5.17: Cambiamento di infinito applicata al nodo a otto

- CREAZIONE DI UNO STATO CUSCINETTO

Definizione 47 *Data una proiezione di un link orientato diremo che una regione è in conflitto se, una volta applicata la risoluzione per cerchi di Seifert, i suoi confini appartengono a due diversi cerchi le cui frecce girano attorno alla regione nello stesso verso (vedi figura 5.18).*

L'operazione di *creazione di uno stato cuscinetto* consiste nell'applicare Ω_2 opportunamente in modo da eliminare le regioni *in conflitto* nel diagramma (vedi figura 5.19).

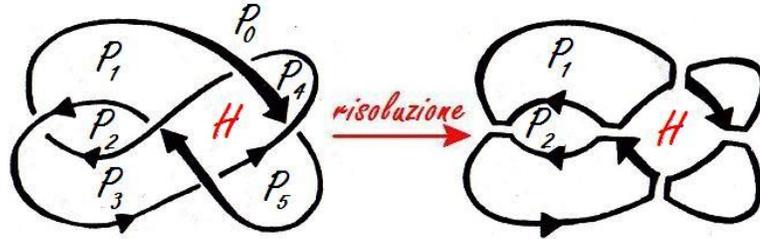


Figura 5.18: Esempio di diagramma con relativa risoluzione. Le regioni P_1 , P_3 , P_4 e P_5 hanno confini appartenenti ad un singolo cerchio di Seifert ciascuno; la regione P_2 ha confini appartenenti a due diversi cerchi di Seifert ma con orientamenti discordi; la regione H invece è *in conflitto*

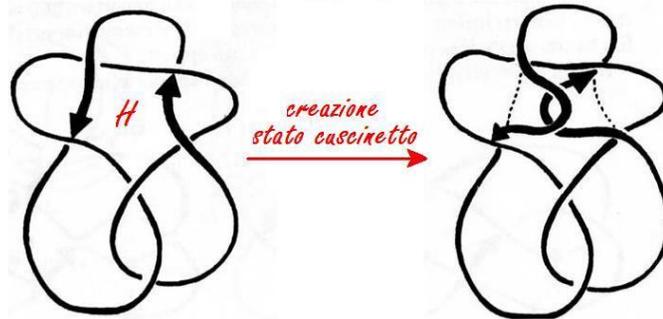


Figura 5.19: Creazione di uno stato cuscinetto

Una volta introdotte queste mosse è possibile mostrare l'algoritmo trovato da Vogel.

Teorema 20 (di Vogel) *Ogni nodo può essere arrotolato applicando una serie di creazioni di stato cuscinetto finché non vi sono più regioni in tumulto, e in seguito applicando una serie di cambiamenti di infinito, finché tutti i cerchi di Seifert sono incastonati.*

È facile mostrare che la seconda parte dell'algoritmo, quella del cambiamento di infinito, è finita e non entra in *loop*. Meno banale, ma ugualmente dimostrabile, è invece mostrare la convergenza della prima parte.

5.2.3 Treccie Markov-equivalenti

Le chiusure di due treccie differenti possono dar luogo allo stesso link. Ha dunque senso considerare la seguente definizione.

Definizione 48 Due trecce α e β si dicono Markov-equivalenti, si indicherà con $\alpha \sim_M \beta$, se le loro chiusure rappresentano lo stesso link.

Si considerino adesso due nuove mosse. Di seguito σ_i avrà lo stesso significato che nel paragrafo precedente, mentre ω sarà una qualsiasi parola rappresentante una treccia.

Teorema 21 (Coniugazione)

$$(iv) \quad \sigma_i^{-1} \omega \sigma_i \sim_M \omega \sim_M \sigma_i \omega \sigma_i^{-1} \quad (\text{vedi figura 5.20}).$$

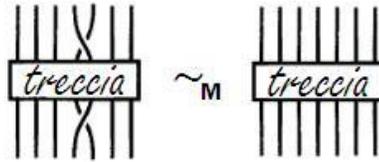


Figura 5.20: Coniugazione di due trecce Markov-equivalenti

Fino a questo momento ci si è limitati allo studio di trecce tutti con egual numero di corde, ovvero si è fissato un $m \in \mathbb{N}$ e si è lavorato unicamente con m -stringhe.

L'ultima proprietà che definiremo, la *stabilizzazione*, mette in relazione trecce appartenenti a gruppi diversi, in particolare m -trecce ed $(m+1)$ -trecce.

Teorema 22 (Stabilizzazione)

$$\text{Se } \omega \text{ è una } n\text{-stringa} \Rightarrow \omega \sigma_n \sim_M \omega \sim_M \omega \sigma_n^{-1} \quad \text{vedi figura 5.21.}$$

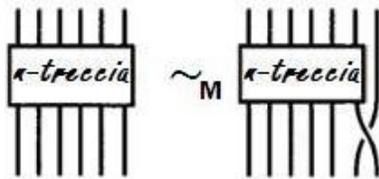


Figura 5.21: Stabilizzazione di una m -treccia ed una $(m+1)$ -treccia

La proprietà di stabilizzazione è l'equivalente nelle trecce chiuse della mossa Ω_1 per i diagrammi piani (vedi figura 5.22).

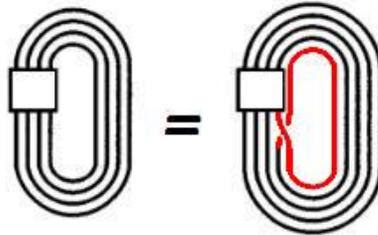


Figura 5.22: Corrispondente della mossa Ω_1 per le chiusure delle trecce

Negli anni '30 **Markov** congetturò che per assicurare la Markov-equivalenza tra due trecce condizione sufficiente e necessaria fosse l'esistenza di una successione di queste due nuove mosse, insieme alle tre definite prima per le trecce generiche, che portasse la prima treccia nella seconda. Tale risultato fu dimostrato più di quarant'anni dopo da **Birman**.

Teorema 23 (di Markov) *Due trecce sono Markov-equivalenti \Rightarrow è possibile passare dall'una all'altra tramite una successione di mosse $(i)-(v)$.*

Tra tutte le trecce la cui chiusura rappresenta un determinato link particolare importanza ricoprono quelle con minor numero possibile di corde.

Definizione 49 *Il minimo numero di corde necessarie per rappresentare un link come chiusura di una treccia α è detto indice di trecciatura di α .*

Una treccia con numero di corde pari all'indice di trecciatura è detta treccia minimale.

Indice analitico

- Alexander, 21
 - James Waddell, 47
 - polinomio di, 21
 - tabulazione di, 12
- Alexander, teorema, 53
- Artin, teorema di, 48
- Birman, 58
- Briggs
 - tabulazione di, 12
- Cambiamento di infinito, 54, 56
- Circuitazione, 14
- Conway, 21, 44, 45
- Creazione di uno Stato Cuscinetto, 55
- Creazione di uno stato cuscinetto, 56
- Crossing number, 12
- Δ -mossa, 4, 33
- Diagramma piano, 6, 7, 39–41
 - minimo, 12
- Disincrocio, 21, 54
- ε -perturbazione, 5
- Flip, 14, 21
- Gauss, Carl Friedrich, 14, 16
- Gordon, 45
- Gordon, Cameron, 44
- Gordon, teorema di, 33
- Grafo, 37
 - cammino, 38
- ciclo, 38, 46
- ciclo Hamiltoniano, 38, 45, 46
- completo, 43
- con segno, 37, 40
- di Petersen, 45
- espansione di un, 37
- etichettato, 37, 39
- immersione, 43, 44
- immersione di un, 37
- intrinsecamente annodato, 46
- intrinsecamente concatenato, 44–46
- $K_{3,3,1}$, 45
- $K_{5,5}$, 46
- K_6 , 43–45
- K_7 , 45, 46
- planare, 37, 40
- scambio $\Delta - Y$, 38, 43, 45
- triangolo, 44
- Gruppo
 - fondamentale, 31, 34
 - fondamentale di un nodo, 32
 - presentazione di un, 31
- Haken, Wolfgan, 3
- HOMFLY, 22
- Incrocio, 6, 40, 49
- Invariante
 - completo, 11
- Invarianti, 11
- Isotopia, 2

- ambiente, 2
- Jones
 - polinomio di, 21
 - Vaughan, 21
- Kampen, teorema di Seifert-vanKampen, 34
- Kauffman
 - bracket di, 22, 25, 26
 - Louis, 22
- Link, 1
 - banale a due componenti, 26
 - di Hopf, 1, 16, 26, 28
 - di Whitehead, 55
- Linking number, 15
- Luecke, teorema di, 33
- LYMPHOTU, 22
- Markov, 58
- Maxwell
 - James Clerk, 16
 - link di, 16
- Negami, 13
- Nodo, 1
 - 5_1 , 14
 - 6_2 , 17
 - a figura otto, 8, 13
 - achirale, 8
 - alternante, 6
 - arrocolato, 53, 56
 - chirale, 8, 29
 - complemento di un, 32
 - composto, 9
 - di Fox, 4
 - domestico, 4
 - equivalenza, 2
 - fattori di un, 10
 - non-nodo, 1, 3, 12–14, 17
 - opposto, 8
 - orientato, 1
 - poligonale, 3
 - primo, 10
 - selvaggio, 4
 - trifoglio, 1, 8, 12, 13, 17, 29, 35
- Numero di componenti, 11
- Numero di tricolorabilità, 19
- Operazioni sui nodi, 8
- Orientamento, cambiamento di, 8
- p-colorabilità, 20
- Polinomi, 21
 - di Jones, 21
 - di Laurent, 21
 - HOMFLY, 22
 - LYMPHOTU, 22
- polinomi
 - di Alexander, 21
- Polinomio
 - di Jones, 27
 - $V(L)$, 27
 - $X(L)$, 26, 28
- Problema di riconoscimento, 3
- Problema di scioglimento, 3
- Proiezione, 5
 - in posizione regolare, 5
- Ramo
 - inferiore, 6, 8, 14, 41
 - superiore, 6, 8, 14, 41
- Ramsey, teoria di, 12
- Reidemeister
 - Kurt, 7
 - Ω_0 , 7, 15, 41
 - Ω_1 , 7, 15, 17, 23–26, 41, 57
 - Ω_2 , 7, 15, 17, 23, 24, 26, 42, 50
 - Ω_3 , 7, 16, 18, 23, 25, 26, 43, 51, 52
- Relazione skein, 21, 27

- Risoluzione per cerchi si Seifert, 54
- Robertson, Neil, 45
- Seifert
 - cerchi di, 54
 - Herbert, 10
 - teorema di Seifert-van Kampen, 34
- Seymour, P.D., 45
- Shimabara, Miki, 46
- Somma connessa, 9
 - fattorizzazione unica, 10
 - numero di tricolorabilità, 19
- Speculare, riflessione, 8
- Stick number, 13
- Superfici, 10

- Tabulazione, 12
- Thomas, Robin, 45
- Treccia, 47, 48
 - chiusura, 52
 - commutatività lontana, 51
 - coniugazione, 57
 - corda, 47, 52
 - elementare, 49
 - equivalenza, 47
 - equivalenza di Markov, 56
 - gruppo, 48–50
 - indice di trecciatura, 58
 - minimale, 58
 - relazione di Artin, 51
 - stabilizzazione, 57
- Tricolorabilità, 17

- Unknotting number, 14

- Vogel
 - algoritmo, 56
 - algoritmo di, 53
 - Pierre, 54
- Whitten, teorema di, 33
- Wirtinger, presentazione di, 33
 - nodo trifoglio, 35
- Writhe, 24–26

Bibliografia

- [1] C. Adams (1994). *The Knot Book - An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. New York: W. H. Freeman and Company.
- [2] J. W. Alexander (1928). *Topological invariants of knots and link*. In *Trans. Amer. Math. Soc.* 30:275-306 e <http://www.maths.ed.ac.uk/aar/papers/alex1.pdf>.
- [3] Beineke, W. Lowell and J. Wilson Robin (1997). *Graph Connections*. Oxford Sience Publications.
- [4] G. Burde and H. Zieschang (1985). *Knots*. Berlin: de Gruyter Studies in Mathematics.
- [5] Collins, J. (2007). *The Alexander Polynomial - The woefully overlooked granddaddy of knot polynomials*. The UOE Geometry Club.
- [6] J. H. Conway and C. McA. Gordon (1983). *Knots and links in spatial graph*. In *J. Graph Theory* 7:445-453.
- [7] R. H. Crowell and R. H. Fox (1963). *Introduction to the Knot Theory*. New York/Berlin: Springer-Verlag.
- [8] D. W. Farmer and T. B. Stanford (1996). *Knots and Surfaces - A Guide to Discovering Mathematics*. U.S.A.: Mathematical World - American Mathematical Society.
- [9] S. Jablan and R. Sazdanovic (2007). *LINKNOT - Knot Theory by Computer*. Singapore: Series on Knot and Everything.
- [10] C. Kosniowski (1988). *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press.
- [11] S. Negami (1991). *Ramsey theorems for knots, link and spatial graphs*. In *Trans. Amer. Math. Soc.* 324(2): 527-541.

- [12] J. Przytycki (1991). *A history of knot theory from Vandermonde to Jones*. In *Proceedings of the Mexican National Congress of Mathematics*, November.
- [13] W. B. Raymond Lickorish (1997). *An Introduction of Knot Theory*. Springer Graduate Texts in Mathematics (175).
- [14] K. Reidemeister (1932). *Knotentheorie*. In *Eregebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Berlin: Springer-Verlag.
- [15] J. Robert (1991). *Knot Knotes*.
<http://math.ucsd.edu/~justin/Papers/knotes.pdf>.
- [16] A. Sossinsky (1999). *Nœuds - Genèse d'une théorie mathématique*. Paris: Édition du Seuil.
- [17] J. J. Wijk and A. M. van and Cohen (2005). *Visualization of the Genus of Knots*. <http://www.win.tue.nl/~anwijk/seifertview>
- [18] J. R. Weeks (2002). *The Shape of Space (second edition)*. Recipient of the MacArthur Fellowship.