Cenni sulla teoria dei nodi

Francesco Dolce

unipa / Dipartimento di Matematica e Applicazioni

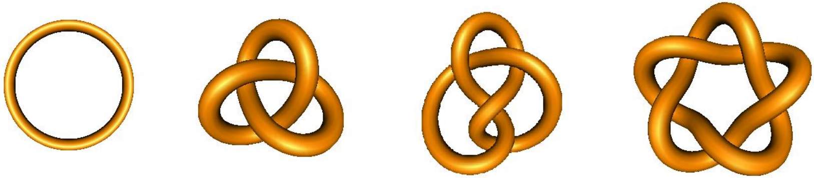
20 luglio 2009

Nodi e Link

Nodi

Definizione

Un *nodo* K è una curva chiusa semplice in $\mathbb{R}^3$. Ovvero K è detto nodo se $\exists\ \varphi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ immersione con $\varphi(S^1) = K$.

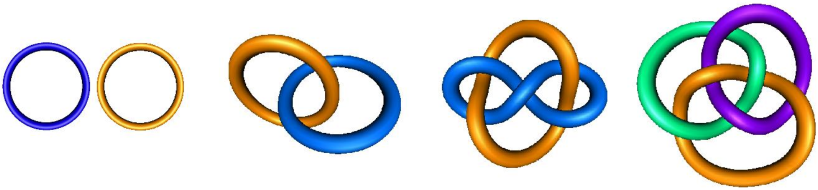


Nodi e Link

Link

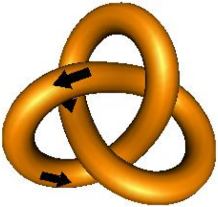
Definizione

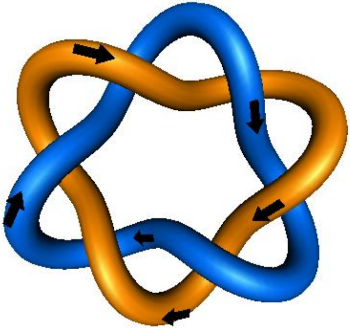
Un *link* L di m componenti è un'unione disgiunta di m nodi. Ovvero $L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_m$ con $K_i \cap K_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j$.



Nodi e Link

Nodi orientati



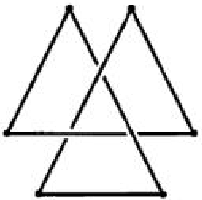


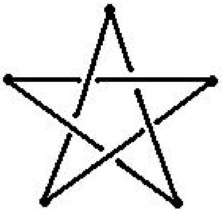
Nodi e Link

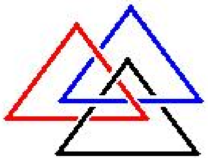
Nodi domestici

Definizione

Un *nodo poligonale* K è una linea spezzata chiusa in $\mathbb{R}^3$

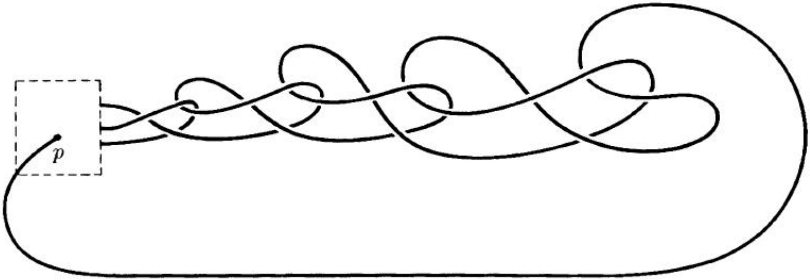






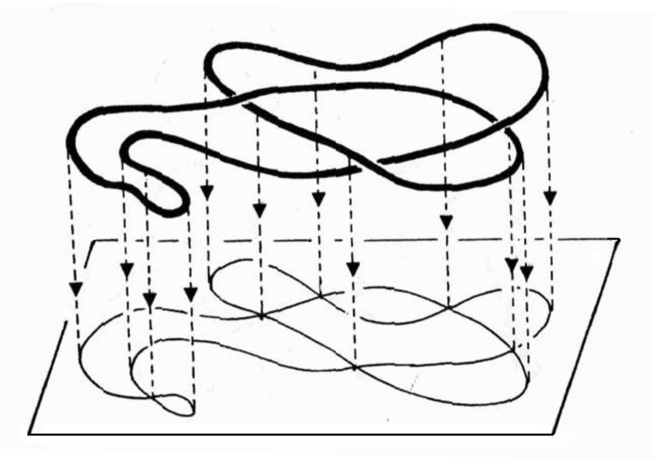
Nodi e Link

Nodi selvaggi



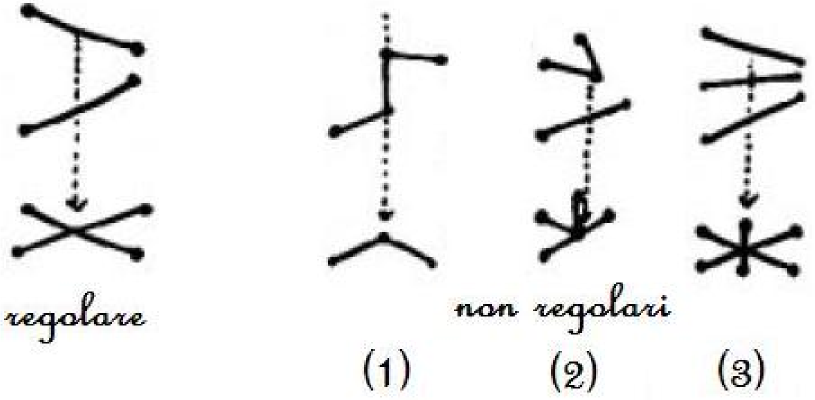
Proiezioni

Proiezioni su un piano



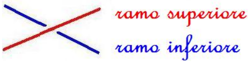
Proiezioni

Proiezioni regolari



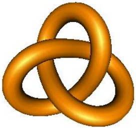
Proiezioni

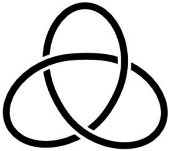
Diagrammi piani



Definizione

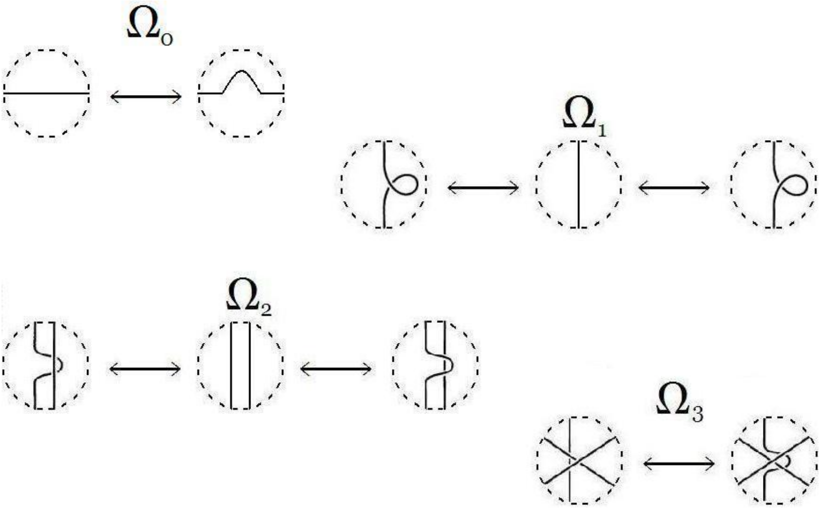
Una proiezione regolare di un nodo con informazioni sugli incroci è detto *diagramma piano* del nodo.





Proiezioni

Mosse di Reidemeister

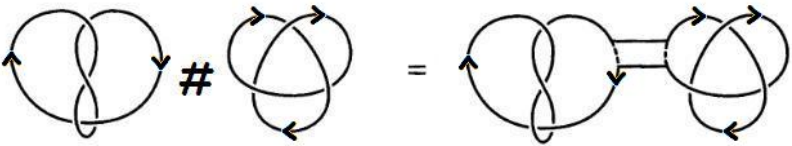


Somma connessa

Definizione

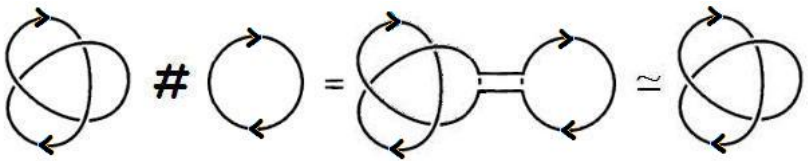
Definizione

Dati due nodi orientati J e K, si definisce *somma connessa* $J \# K$ il nodo ottenuto rimuovendo un piccolo arco da J ed uno da K e unendo i due estremi del primo nodo con quelli del secondo coerentemente.



Somma connessa

Somma al non-nodo

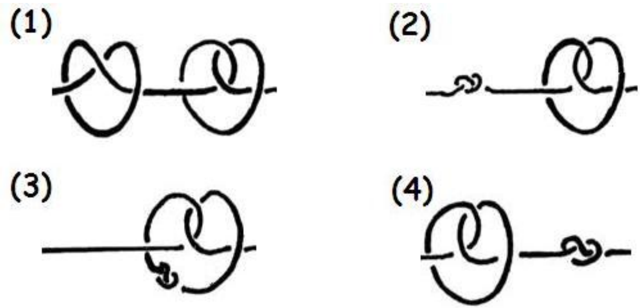


Definizione

K è detto *nodo primo* se $K = J_1 \# J_2 \quad \Rightarrow \quad J_1, J_2$ non-nodo.

Somma connessa

Proprietà commutativa



Teorema

$(\mathbb{K}, \#)$ è un semigruppo e la fattorizzazione in nodi primi è unica.

Invarianti

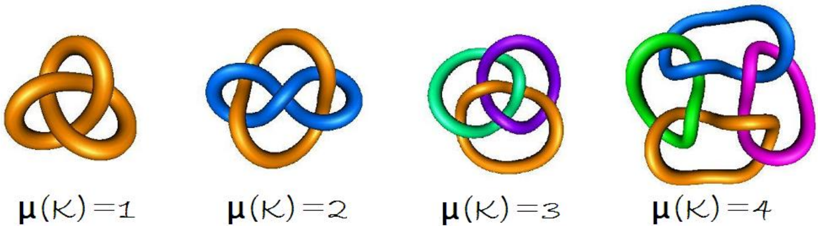
Definizione

Definizione

Un *invariante* i è una funzione dipendente solo dalla classe di equivalenza del nodo. Ovvero $K \simeq K' \Rightarrow i(K) = i(K')$.

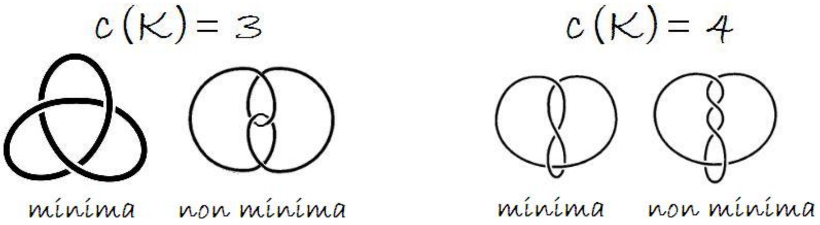
Invarianti

$\mu(L)$ - *Numero di componenti*



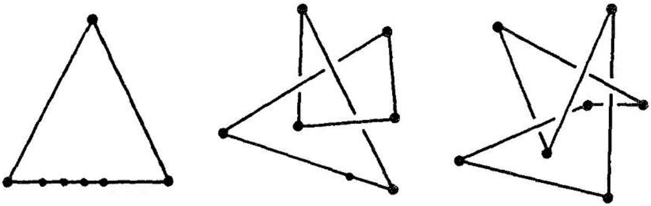
Invarianti

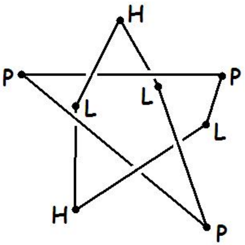
$c(K)$ - *Crossing number*



Invarianti

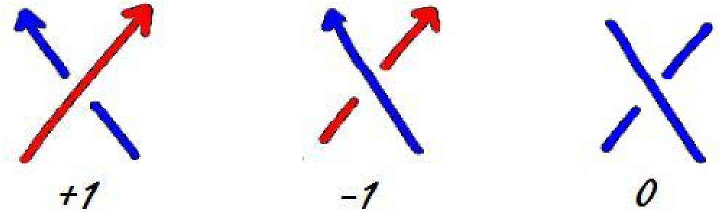
$s(K)$ - *Stick number*





Invarianti

$Lk(K)$ - *Linking number*

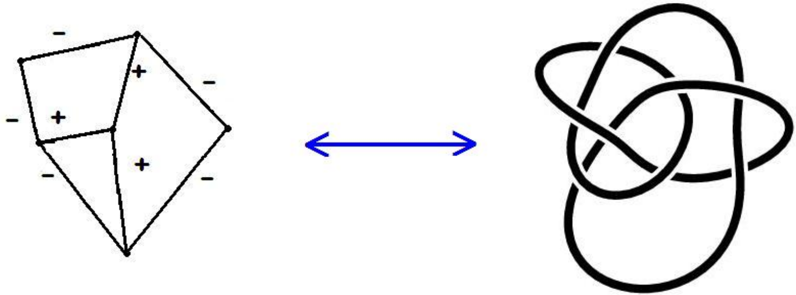


Definizione

$$Lk(L) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \pi(L)} Lk(c)$$

Grafi

Diagrammi piani e Grafi planari

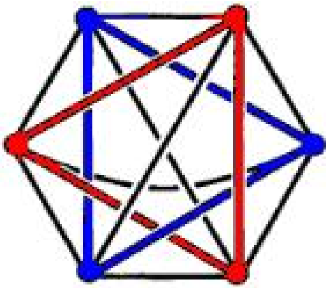


Grafi

Grafi intrinsecamente concatenati

Definizione

Un grafo è detto *intrinsecamente concatenato* se qualsiasi sua immersione in $\mathbb{R}^3$ contiene link non banali.



Grafi

Grafi intrinsecamente annodati

Definizione

Un grafo è detto *intrinsecamente annodato* se qualsiasi sua immersione in $\mathbb{R}^3$ contiene un ciclo annodato in maniera non banale.

Teorema

Un grafo intrinsecamente annodato è sempre intrinsecamente concatenato. (Robertson et al., 1993)

Trecce

Definizione

Definizione

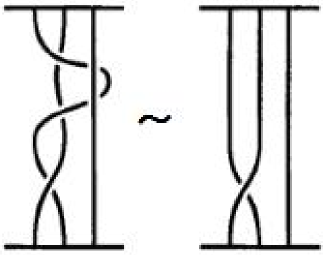
Consideriamo due linee parallele e su queste m punti distinti. Una *treccia* di m componenti (o m – *treccia*) è un insieme di m curve disgiunte, di estremi uno dei punti scelti sulla prima linea ed uno sulla seconda, tali da intersecare ogni piano parallelo compreso tra le due linee una ed una sola volta.

Trecce

Equivalenza tra trecce

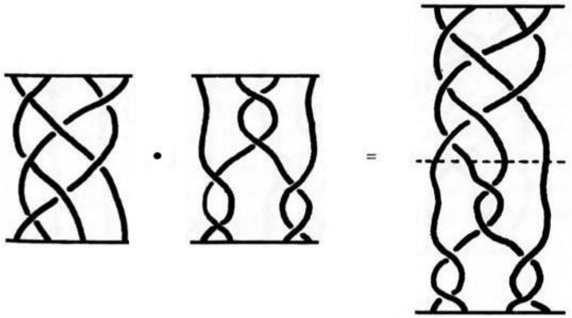
Definizione

Diremo che due trecce sono equivalenti se omotope relativamente agli estremi l'una a l'altra in $\mathbb{R}^3$.



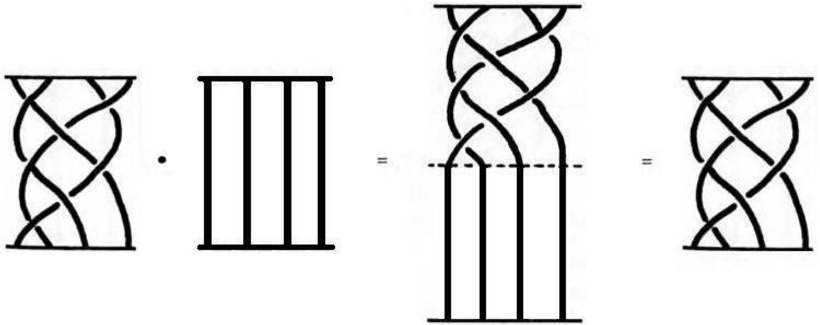
Trecce I

Teorema di Artin



Trecce II

Teorema di Artin



Trecce III

Teorema di Artin

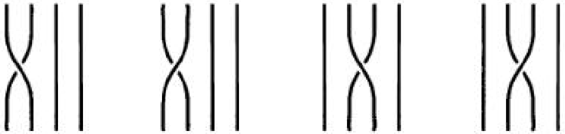
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- in generale $a \cdot b \neq b \cdot a$

Teorema

B_n è un gruppo non commutativo. (Artin, 1923)

Trecce

Trecce elementari



σ_1 $\quad \sigma_1^{-1}$ $\quad \sigma_2$ $\quad \sigma_2^{-1}$

Esempio:

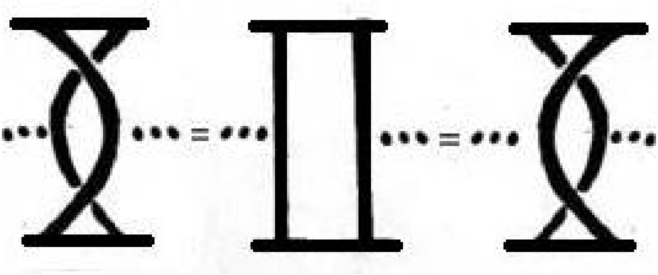
$$\sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_1\,\sigma_1$$

Trecce I

Proprietà

Proprietà

(i) $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1 = \sigma_i^{-1} \sigma_1 \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n-1$

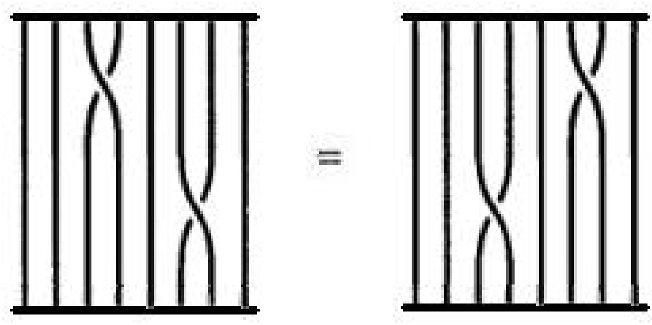


Trecce II

Proprietà

Proprietà

(ii) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ se $|i-j|>1$ (commutatività lontana)

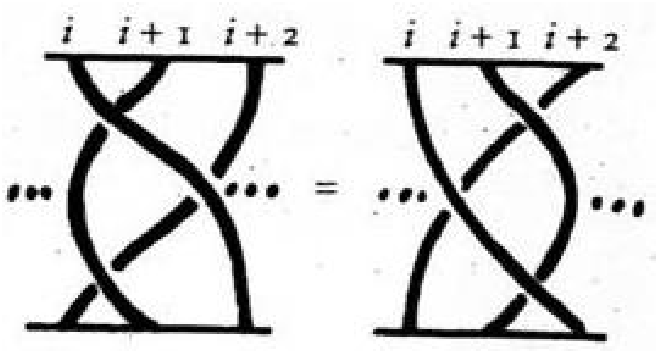


Trecce III

Proprietà

Proprietà

(iii) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma i \sigma_{i+1}$ (relazione di Artin)

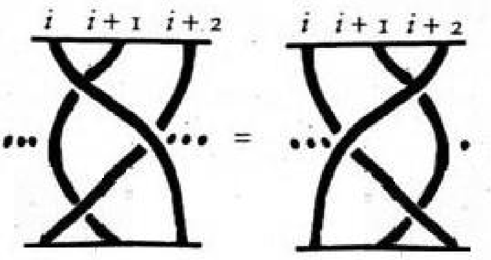


Trecce IV

Proprietà

Osservazione

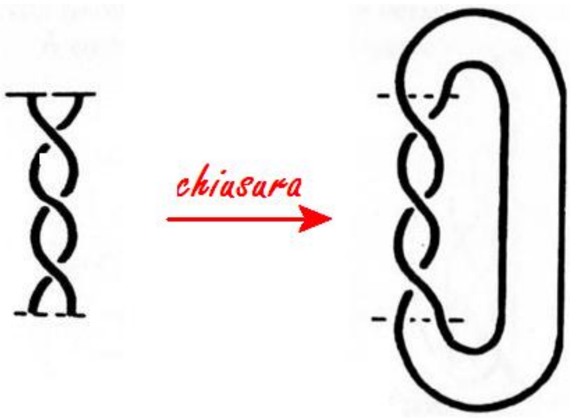
$\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = (\sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_{i+1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1})\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,(\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i)\,\sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1}\,\sigma_i\,\sigma_{i+1}\,(\sigma_i\,\sigma_i^{-1}) = \sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i\sigma_{i+1}$



Similmente si ha $\sigma_i^{-1}\,\sigma_{i+1}\,\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}$

Chiusura di una treccia

Definizione



Chiusura di una treccia

Teorema di Alexander

Teorema

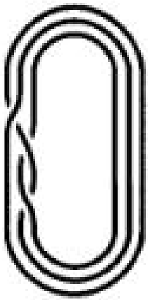
Ogni link è ottenibile dalla chiusura di un'opportuna treccia. (Alexander, 1923)

Trecce chiuse

Trecce Markov-Equivalenti

Definizione

Due trecce si dicono *Markov-equivalenti* se le loro chiusure rappresentano lo stesso link.

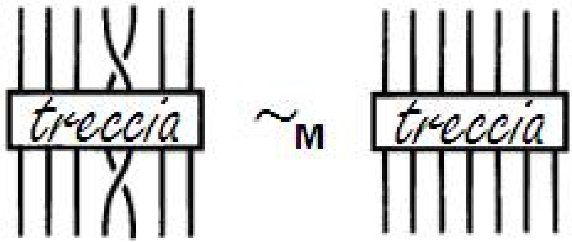


Trecce chiuse I

Due nuove mosse

Proprietà

(iv) $\sigma_i^{-1}\,\omega\,\sigma_i = \omega = \sigma_i\,\omega\,\sigma_i^{-1}$ (coniugazione)

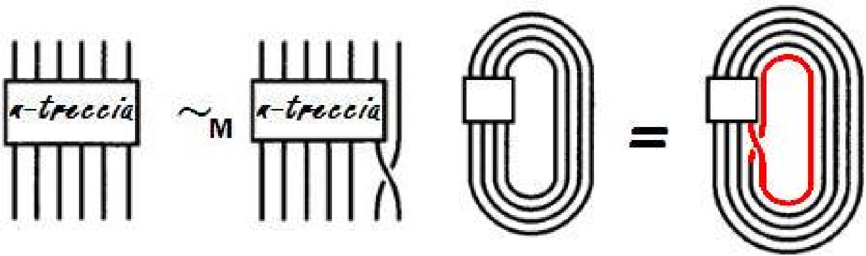


Trecce chiuse II

Due nuove mosse

Proprietà

(v) $\omega\sigma_n = \omega = \omega\sigma_n^{-1}$ se ω è una $n-$stringa. (stabilizzazione)



Trecce chiuse

Teorema di Markov

Teorema

Due trecce sono *Markov-equivalenti* $\Leftrightarrow$ è possibile passare dall'una all'altra tramite una successione di mosse $(i) - (v)$. (Birman, 1976)

Definizione

Il minimo numero di stringhe necessarie per rappresentare un link come chiusura di una treccia B è detto *indice di trecciatura* di B.
Una treccia con numero di stringhe pari all'indice di trecciatura è detta *treccia minimale*.

Gruppo di un nodo

Definizione

Definizione

Sia K un nodo in $\mathbb{R}^3$. Sia X il complementare di K, ovvero $X = \mathbb{R}^3 - K$. Si definisce *gruppo del nodo* $\pi(K)$ il gruppo fondamentale $\pi(X, x_0)$, con $x_0 \in X$.

Teorema

- Nodi equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi.
- Due nodi con complementi omeomorfi sono equivalenti. (Gordon & Luecke, 1987)

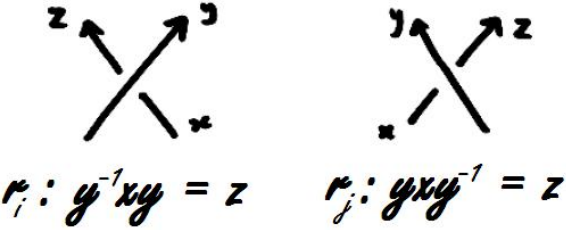
Gruppo di un nodo

Presentazione di Wirtinger

Teorema

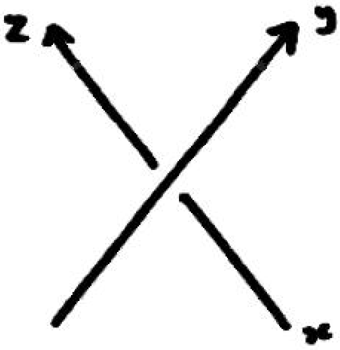
Sia D un diagramma piano di K. Indichiamo con $a_1, a_2, \cdots a_c$ gli archi di D e con r_1, r_2, r_c le relazioni tra gli archi definite come in figura.

$$\pi(K) \cong < a_1, a_2, \cdots a_c \ : \ r_1, r_2, \cdots r_c >$$



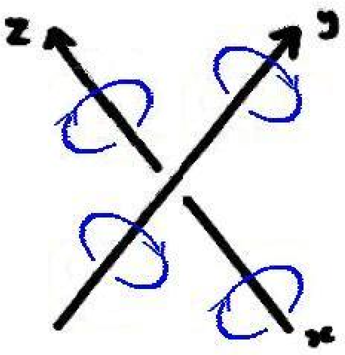
Gruppo di un nodo I

Presentazione di Wirtinger



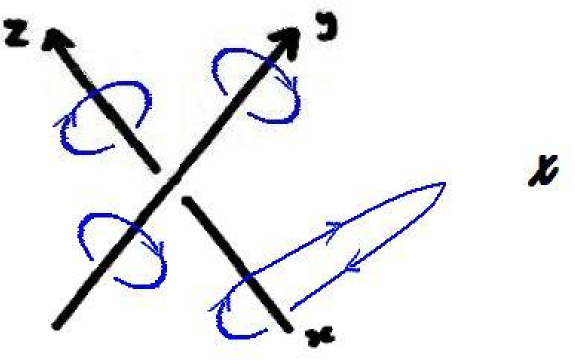
Gruppo di un nodo II

Presentazione di Wirtinger



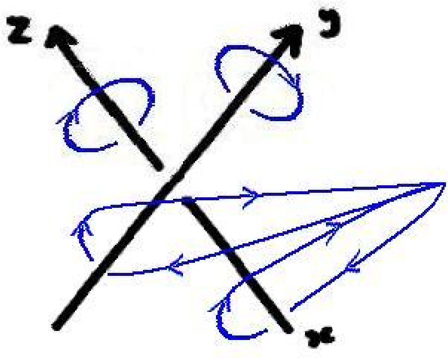
Gruppo di un nodo III

Presentazione di Wirtinger



Gruppo di un nodo IV

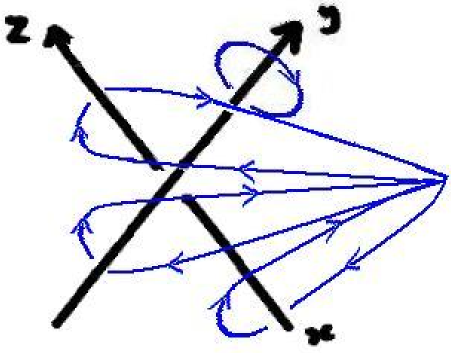
Presentazione di Wirtinger



xy

Gruppo di un nodo V

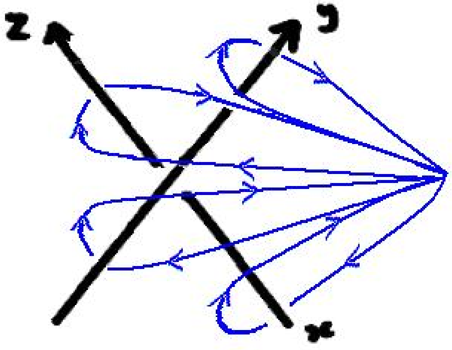
Presentazione di Wirtinger



xyz^{-1}

Gruppo di un nodo VI

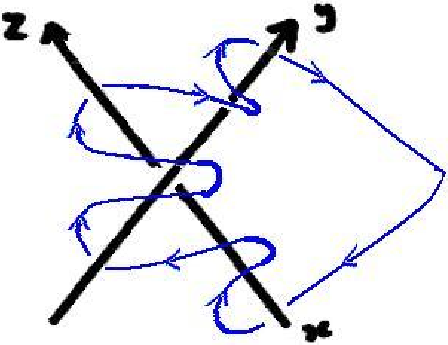
Presentazione di Wirtinger



$xyz^{-1}y^{-1}$

Gruppo di un nodo VII

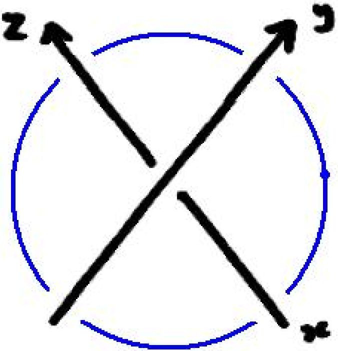
Presentazione di Wirtinger



$$x y z^{-1} y^{-1}$$

Gruppo di un nodo VIII

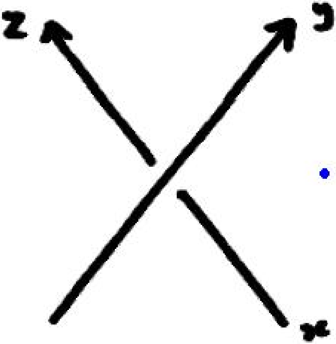
Presentazione di Wirtinger



$$x y z^{-1} y^{-1}$$

Gruppo di un nodo IX

Presentazione di Wirtinger



$$x y z^{-1} y^{-1} = \varepsilon$$

Gruppo di un nodo X

Presentazione di Wirtinger

$$xyz^{-1}y^{-1} = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$xyz^{-1} = y$$

$$\Downarrow$$

$$y^{-1}xyz^{-1} = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$y^{-1}xy = z$$

Domande?